MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. M. Schottenloher
Dr. S. Tappe

WS 2006/07

Version 15.1.

Lösungen

zur

1. Klausur zur MIA: Analysis I für Mathematiker

vom 16.12.06

Aufgabe 1. (2 + 2 Punkte)

a) Es sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Beweisen Sie durch vollständige Induktion

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

b) Folgern Sie aus Teil a), daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

für alle $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ konvergiert und bestimmen Sie Ihren Summenwert.

(Diese Aufgabe sollte einen sicheren Einstieg in die Klausur erleichtern. Die Formulierung stellt klar, dass ausnahmsweise die Hinweise auf entsprechende Resultate der Vorlesung nicht ausreichen, sondern dass die Überlegung hier vollständig dargelegt werden soll.)

Lösung:

a) Für $n = 0$ ist $\sum_{k=0}^{n} q^k = q^0 = 1$ und $\frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{q^1-1}{q-1} = 1$, also ist die Induktionsvoraussetzung erfüllt.

Der Induktionsschritt $n \to n+1$: Nach Definition des Summenzeichens ist

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1},$$

nach Induktionsvoraussetzung also

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + \frac{q^{n+1}(q-1)}{q-1},$$

also

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{q^{n+2}-1}{q-1}$$

und das war zu zeigen.

Variante 1: Durch Induktion $(q-1)\sum_{k=0}^{n} q^k = q^{n+1}-1$ zeigen.

Variante 2: Die letzte Formel direkt zeigen: $(q-1)\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n}(q-1)q^k = \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} q^k = q^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} q^{k+1} - \sum_{k=1}^{n} q^k - 1 = q^{n+1} - 1$. Die Induktion ist in den erlaubten

Manipulationen der Summen enthalten.

b) Für $|q| < 1$ konvergiert (q^n) gegen 0, also auch $\frac{q^{n+1}}{q-1} = \frac{q}{q-1}q^n$ nach dem Satz über Produkte von konvergenten Folgen. Die Partialsummen

$$s_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{q^{n+1}}{q-1} - \frac{1}{q-1}$$

der Reihe konvergieren daher gegen $0 - \frac{1}{q-1} = \frac{1}{1-q}$ nach dem Satz über die Addition von konvergenten Folgen.

Aufgabe 2. (2 + 1 + 1 Punkte)

a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: Für ein geeignetes $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt

$$2^n > n^3 \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

b) Welches ist das kleinste $n_0 \in \mathbb{N}$ mit dieser Eigenschaft?

c) Gibt es noch ein $n \in \mathbb{N}$, $n < n_0$ mit $2^n > n^3$?

(In dieser Aufgabe sollte ein Induktionsbeweis mit einfacher Struktur geführt werden. Die ausführlichen Fragen sollten darauf aufmerksam machen, dass nicht einfach drauflos gerechnet werden kann, sondern dass der Induktionsbeginn erst einmal bestimmt werden muss.)

Lösung:

Es bleibt nichts übrig als die ersten Fälle durchzurechnen, es sei denn man erinnert sich an $2^{10} = 1024$. Damit bekommt man wegen $10^3 = 1000$ einen guten Kandidaten für den Induktionsbeginn und sieht vielleicht sofort $2^9 < 9^3$.

$2^0 = 1 > 0^3 = 0$,
$2^1 = 2 > 1^3 = 1$,
$2^{10} = 1024 > 10^3 = 1000$.
Hier stimmt also die geforderte Aussage.

Im Folgenden stimmt sie nicht:

$2^2 = 4 \quad < 2^3 = 8\,,$
$2^3 = 8 \quad < 3^3 = 27\,,$
$2^4 = 16 \;\; < 4^3 = 64\,,$
$2^5 = 32 \;\; < 5^3 = 125\,,$
$2^6 = 64 \;\; < 6^3 = 216\,,$
$2^7 = 128 < 7^3 = 343\,,$
$2^8 = 256 < 8^3 = 512\,,$
$2^9 = 512 < 9^3 = 729\,.$

Behauptung: Für $n \geq 10$ gilt $2^n > n^3$.

Beweis durch Induktion. Der Beginn für $n = 10$ steht schon oben.

Induktionsschritt (Variante A) $n \longrightarrow n+1$: $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$, und nach Induktionsvoraussetzung $n^3 < 2^n$, also $n^2 < \frac{2^n}{n}$, $n < \frac{2^n}{n^2}$. Also wegen $1000 < 2^{10} < 2^n$ für $n \geq 10$:

$$(n+1)^3 < 2^n + 3\frac{2^n}{n} + 3\frac{2^n}{n^2} + \frac{2^n}{1000} = 2^n\left(1 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{1}{1000}\right) < 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}\,,$$

für $n \geq 10$, da $\frac{300}{1000} + \frac{30}{1000} + \frac{1}{1000} < 1$.

Wenn man verständlicherweise nicht sofort sieht, dass man die Induktionsvoraussetzung mehrfach einsetzen kann, wird man z.B. wie folgt vorgehen:

Induktionsschritt (Variante B) $n \longrightarrow n+1$: $2^{n+1} = 2^n + 2^n > n^3 + n^3$ nach Induktionsvoraussetzung. $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$. Es bleibt also zu zeigen:

$$n^3 \geq 3n^2 + 3n + 1$$

Variante B1: Induktion nach n ab 10: $10^3 = 1000 > 300 + 30 + 1$ als Induktionsbeginn. $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 > 3n^2 + 3n^2 + 3n + 1$ nach Induktionsvoraussetzung und $3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 = 3n^2 + 9n + 7$. Wegen $3n^2 + 3n + 1 > 9n + 7$ sogar für alle $n \geq 3$ folgt die Beh. (Gegebenenfalls wird die letzte Ungleichung auch noch durch Induktion bewiesen.)

Variante B2: Statt die Ungleichung mit einer zweiten Induktion zu beweisen, ist auch gut, folgendermaßen zu argumentieren: Für $n \geq 5$ ist $n^3 \geq 5n^2$ und $2n^2 \geq n^2 + n^2 \geq 3n + 1$, wie man durch Vergleich der Summanden sofort sieht, also $n^3 \geq 5n^2 = 3n^2 + 2n^2 \geq 3n^2 + 3n + 1$.

Damit ist 10 die kleinste der natürlichen n_0 mit der gesuchten Eigenschaft, und als Weiteres wird sie von $n = 0$ und $n = 1$ erfüllt.

Aufgabe 3. (1 + 1 + 1 + 1 Punkte) Entscheiden und begründen Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

a) Für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ mit $x < y$ gibt es ein $z \in \mathbb{Z}$, so daß $x < z < y$.

b) Für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $x < y$ gibt es ein $z \in \mathbb{Q}$, so daß $x < z < y$.

c) Für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ mit $x < y$ gibt es ein $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so daß $x < z < y$.

d) Für alle $x \in \mathbb{Q}$ und alle $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $x < y$ gibt es ein $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so daß $x < z < y$.

(Hintergrund dieser Aufgabe ist die Aussage, dass $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht liegt und Verwandtes.)

Lösung:

a) Die Aussage ist falsch, weil es z.B. zu $0, 1 \in \mathbb{Q}$ keine ganze Zahl n mit $0 < n < 1$ gibt.

b) Die Aussage ist richtig, denn $z := \frac{x+y}{2} = x + \frac{y-x}{2} = y - \frac{y-x}{2}$ erfüllt $x < z < y$ und $z \in \mathbb{Z}$.

c) Die Aussage ist richtig, denn z.B. für $z := x + \frac{y-x}{2}\sqrt{2}$ ist $x < z < y$ und es gilt $z \notin \mathbb{Q}$. Sonst wäre $\frac{y-x}{2}\sqrt{2} = z - x$ in $\mathbb{Q}$ und dann auch $\sqrt{2} = (\frac{y-x}{2})^{-1}\frac{y-x}{2}\sqrt{2}$ im Widerspruch zu $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

d) Die Aussage ist richtig. Zu $y - x > 0$ findet man $n \in \mathbb{N}_1$ mit $\frac{1}{n} < y - x$ (Eudoxos / Archimedes). Also ist $z := x + \frac{1}{2n}\sqrt{2} < x + \frac{1}{n} < y$ und natürlich $x < z$. Wie in c) ist z nicht in $\mathbb{Q}$.

Bemerkung: c) und d) folgen auch unmittelbar aus der Tatsache, dass $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ dicht ist in $\mathbb{R}$, eine Aussage, die wir allerdings in der Vorlesung nicht explizit bewiesen haben. Der Beweis geht wie die Überlegung zu c) oben.

Aufgabe 4. (1 + 1 + 1 + 1 Punkte) Entscheiden und begründen Sie, welche der folgenden Mengen nach oben/unten beschränkt ist bzw. ein Maximum/Minimum hat.

a) $M_a = \{n \in \mathbb{N}_1 : n^2 = (2k-1)n$ für geeignetes $k \in \mathbb{N}_1\}$.

b) $M_b = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 - 1 > 0\}$.

c) $M_c = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| - 1 < 0\}$.

d) $M_d = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 1 > 0\}$.

(Der Umgang mit dem Begriff der Beschränktheit wird hier geprüft.)

Lösung:

a) M_a ist nach unten beschränkt und hat ein Minimum: 1 erfüllt $1^2 = (2 \cdot 1 - 1)1$, also $1 \in M_a$ und 1 ist Minimum von M_a, weil $M_a \subset \mathbb{N}_1$ gilt. ist $n^2 = (2k-1)n$.

M_a ist nicht nach oben beschränkt, denn $n_k := 2k - 1$ ist in M_a: $n_k^2 = (2k-1)n_k$ und die Folge $(2k-1)$ ist unbeschränkt. Wir haben auch gezeigt: $M_a := \{2k+1 \,|\, k \in \mathbb{N}\}$.

b) $M_b =]-\infty, -1[\cup]\,1, \infty[$. Daher ist M_b weder nach oben noch nach unten beschränkt.

c) $M_c =]0, 2[$ ist beschränkt mit $\sup M_c = 2$, aber $2 \notin M_c$, und mit $\inf M_c = 0$, aber $0 \notin M_c$. Also hat M_c weder Minimum noch Maximum.

d) $M_d = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.

Aufgabe 5. (3 + 3 Punkte) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei gegeben durch $a_0 := 3$ und

$$a_n := \frac{2n}{2 + (-1)^n n}, \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

a) Berechnen Sie $\limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

b) Bestimmen Sie $\sup M$ und $\inf M$ für $M = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(Der Umgang mit $\limsup$ und $\liminf$ wird hier abgefagt, wie auch die Bestimmung von Minimum und Maximum.)

Lösung:

a) $a_{2n} = \frac{4n}{2+2n} = \frac{2}{\frac{1}{n}+1} \to 2$ und $1 \le a_{2n} = \frac{2}{\frac{1}{n}+1} < 2$ für $n \in \mathbb{N}_1$.

$a_{2n+1} = \frac{4n+2}{2-(2n+1)} = \frac{4n+2}{1-2n} = \frac{4+\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}-2} \to -2$ und $a_{2n+1} = \frac{4n+2}{1-2n} < 0$ für $n \in \mathbb{N}_1$.

Also $\limsup_{n\to\infty} a_n = 2$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n = -2$

b) In a) wurde bereits $a_n < 2$ für $n \in \mathbb{N}_2$ gezeigt, also $\sup M = a_0 = 3$ wegen $a_1 = 2$.
Die Teilfolge $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}_1}$ ist monoton wachsend: $a_{2n+1} = \frac{4n+2}{1-2n} = -2 - \frac{4}{2n-1} < -2 - \frac{4}{2n+1} = a_{2(n+1)+1}$. Wegen $a_1 = 2$, $a_3 = \frac{6}{-1} = -6$ ist daher Daher $\inf M = -6$.

Aufgabe 6. (4 Punkte) Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n < 0$, $n \in \mathbb{N}$ gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Zeigen Sie, daß es zu jedem Index $n \in \mathbb{N}$ ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n < a_m$ für alle $m \geq m_0$ gibt.

(Diese Aufgabe erfordert die präzise Anwendung der Definition der Konvergenz einer Folge.)

Lösung:

Für jedes n gilt mit $\varepsilon := -a_n > 0$: Es gibt ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \geq m_0$ gilt: $|a_m| < \varepsilon$, weil die Folge nach Voraussetzung eine Nullfolge ist. Offenbar ist daher $-a_m < -a_n$, also $a_n < a_m$, was zu zeigen war.

Aufgabe 7. (2 + 2 Punkte)

a) Formulieren Sie für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das Monotoniekriterium.

b) Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $0 < b_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \prod_{k=0}^{n} b_k, \quad n \in \mathbb{N}$$

konvergiert.

(Die Aufgabe b) kann evtl. schwierig aussehen, daher sollte durch a) ein Hinweis gegeben werden, wie man am besten vorgeht. Leider wurde nicht zu selten „Kriterium" als „Definition" verstanden.)

Lösung:

a) *Jede monotone Folge in $\mathbb{R}$ ist bereits konvergent, wenn sie beschränkt ist.*
Richtig ist auch: *Jede monotone Folge aus $\mathbb{R}$ ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.*

b) Es genügt nach a) zu zeigen, dass die Folge monoton fallend ist, denn sie ist sicherlich durch 0 nach unten beschränkt. $a_{n+1} = b_{n+1}a_n < a_n$ wegen $0 < b_{n+1} < 1$, also ist (a_n) monoton fallend.

Aufgabe 8. (2 + 2 + 2 Punkte) Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte.

a) $a_n = \dfrac{2n^2 + 3n + 5}{n^2 + 4n + 7}$

b) $a_n = \dfrac{2^{n+1} \cdot n^n \cdot (n+1)!}{2^n \cdot n! \cdot (n+1)^{n+1}}$

c) $a_n = \dfrac{n^2 \sqrt[n]{n}}{(n+1)(n+3)}$

(Hier konnte elementares Basiswissen (Permanenzeigenschaften bei konvergenten Folgen) eingesetzt werden mit sofortigem Erfolg! Abgesehen von Rechenfehlern.)

Lösung:

a)

$$a_n = \frac{2+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}{1+\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}} \longrightarrow \frac{2+0+0}{1+0+0} = 1$$

b)

$$a_n = \frac{2 \cdot n^n}{(n+1)^n} = \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n} \longrightarrow \frac{2}{e}$$

c)

$$a_n = \frac{\sqrt[n]{n}}{\frac{n+1}{n}\,\frac{n+3}{n}} \longrightarrow \frac{1}{1 \cdot 1} = 1$$

Aufgabe 9. (6 Punkte) Untersuchen Sie die Folge

$$a_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}, \quad n \in \mathbb{N}_1$$

auf Konvergenz.

(Diese Folge ist entgegen des ersten Eindrucks keine Folge von Partialsummen und daher spielt Reihenkonvergenz hier keine Rolle, Der Unterschied sollte beachtet werden, dann ist man mit dem Monotoniekriterium wieder schnell durch!)

Lösung:

Die Folge konvergiert, weil sie durch 0 nach unten beschränkt ist und weil sie monoton fallend ist:

$$a_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = a_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

und

$$-\frac{1}{n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = (\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n}) + (\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n}) < 0.$$

Aufgabe 10. (6 Punkte) Sei s die Summe der konvergenten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Zeigen Sie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{3}{4}s.$$

(Die Absicht dieser Aufgabe ist, das Rechnen mit Grenzwerten von Folgen bzw. Reihen anzuwenden.)

Lösung:

Die n-te Partialsumme der Reihe $\sum_{k=1} \frac{1}{(2k-1)^2}$ sei s_n^* und $s_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$. Dann gilt $s_{2n} = s_n^* + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} = s_n^* + \frac{1}{4}s_n$. Also folgt aus dem Satz über Summen von konvergenten Reihen:

$$s_n^* = s_{2n} - \frac{1}{4}s_n \longrightarrow s + \frac{1}{4}s = \frac{3}{4}s\,.$$

Aufgabe 11. (4 + 4 Punkte) Es seien K ein angeordneter Körper, $e \in K$ und die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch

$$x_0 := e \quad \text{und} \quad x_{n+1} := x_n + 1_K,\, n \in \mathbb{N}$$

definiert. Hierbei bezeichnet 1_K das Einselement des Körpers K.

a) Entscheiden und begründen Sie, ob die Menge $\mathbb{M} := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ stets unbeschränkt ist.

b) Beweisen Sie, daß $\mathbb{M}$ zusammen mit dem Anfangselement e und der Nachfolgerfunktion $S : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$, definiert durch $S(x_n) := x_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$, ein System natürlicher Zahlen bildet.

(Hier geht es um die Basiskonzepte wie *System natürlicher Zahlen* und *archimedische Anordnung*. Im wesentlichen ist diese Aufgabe ein Abfragen dieser Konzepte.)

Lösung:

a) Sei erst einmal $e = 0$. Dann ist $\mathbb{M} = \mathbb{N}_K$ und $\mathbb{M}$ ist nach unten beschränkt. Nach Satz ist $\mathbb{N}_K$ genau dann unbeschränkt, wenn K archimedisch angeordnet ist.

(Ist K archimedisch angeordnet, so wird jedes Element $x \in K$ durch $n \in \mathbb{N}_K$ übertroffen. D.h. N_K ist unbeschränkt. Ist K nicht archimedisch angeordnet, so gibt es $b \in K$, das durch kein $n \in \mathbb{N}_K$ übertroffen wird, d.h. $\mathbb{N}_K$ ist durch b nach oben beschränkt.)

Für allgemeines $e \in K$ ist $\psi : K \to K$, $x \mapsto x + e$, eine Abbildung mit $\psi(\mathbb{N}_K) = \mathbb{M}$ und der Eigenschaft: $x < y \iff \psi(x) < \psi(y)$. Also ist $\mathbb{M}$ genau dann beschränkt. wenn $\mathbb{N}_K$ beschränkt. Die vollständige Behandlung von a) lautet also: $\mathbb{M}$ ist genau dann unbeschränkt, wenn K archimedisch angeordnet ist.

b) Wir wissen aus der Vorlesung: $\mathbb{N}_K$ ist ein System natürlicher Zahlen. Daher folgt die Behauptung unter Verwendung von ψ, denn $\psi : \mathbb{N}_K \to \mathbb{M}, x \mapsto x + e$ ist eine Bijektion, mit $\psi(0) = e = x_0, \psi(n+1) = S(x_n)$. Diese letzte Eigenschaft folgt aus $x_n = n + e = \psi(n)$, und das ist klar. (Ausführlich durch Induktion : $x_0 = 0 + e = e$ und $x_{n+1} = x_n + 1 = (n + e) + 1 = (n + 1) + e = \psi(n + 1)$).

Ein anderer Weg, die Aufgabe zu lösen, ist das direkte Nachprüfen der Axiome:

P.1: $S : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ ist injektiv: $S(x_n) = S(x_k)$ bedeutet $n = k$, weil $S(x_n) = x_{n+1}$.
P.2: $e \notin S(\mathbb{M})$ bedeutet $e \neq S(x_n) = x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Anordnung besagt aber bereits $e < x_{n+1}$. Ganz ausführlich durch Induktion: $e < e + 1 = x_1 = x_{0+1}$ und aus $e < x_{n+1}, x_{n+1} < x_{n+1} + 1 = x_{n+2}$ ergibt sich $e < x_{n+2}$.
P.3: Sei $B \subset \mathbb{M}$ mit $e \in B$ und $S(B) \subset B$. Dann $B = \mathbb{M}$, d.h. $x_n \in B$ für alle $n \in N$. Das sieht man durch Induktion: $e = x_0 \in B$ nach Voraussetzung. Ist $x_n \in B$ so ist $x_{n+1} = S(x_n) \in S(B) \subset B$, also $x_{n+1} \in B$.