Version 21.01. Dezember 2006

MIA – Analysis einer reellen Veränderlichen – WS 06/07

Kurzfassung

Martin Schottenloher

$\infty\infty\infty$

Kapitel IV. Potenzreihen über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

Die wichtigsten Funktionen werden durch konvergente Potenzreihen beschrieben, deshalb wird den Potenzreihen ein eigenes Kapitel gewidmet. Potenzreihen mit Koeffizienten im Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen haben im wesentlichen dasselbe Verhalten wie die reelle Potenzreihen, daher beginnen wir mit einem Paragraphen über komplexe Folgen und Reihen, in dem wir die Begriffe und Resultate des letzten Kapitels durch Verallgemeinerung auf $\mathbb{C}$ verfestigen.

§10 Folgen und Reihen komplexer Zahlen

Die Paragraphen 7 – 9 werden auf den Fall komplexer Folgen und Reihen mit komplexen Gliedern übertragen.

Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen wird bekanntlich realisiert als $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ mit der Multiplikation

$$(x,y)(x',y') := (xx' - yy', xy' + yx') \text{ wobei } (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2 .$$

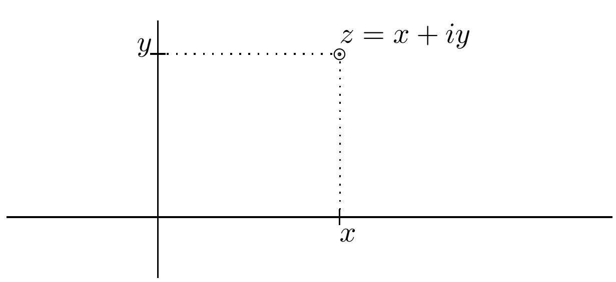
Notationen: $\mathbb{R}^2$ wird mit dieser Multiplikation zu einem Körper, der mit $\mathbb{C}$ bezeichnet wird.

Das *Nullelement* ist $0_\mathbb{C} = (0,0)$ und wir schreiben $0 := (0,0)$.

Das *Einselement* ist $1_\mathbb{C} = (1,0)$ und wir schreiben $1 := (1,0)$.

Die „imaginäre Einheit“ ist $i := (0,1)$, und es gilt $i^2 = -1 = (-i)^2$. (Das ist eine wichtige Motivation für den Übergang von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$.)

Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ hat die eindeutige Darstellung $z = (x,y) = x\cdot 1 + y\cdot i$ und man schreibt dafür $z = x + iy$ mit $x =: \mathrm{Re}\, z$ und $y =: \mathrm{Im}\, z$.



$\mathbb{C}$ wird wegen dieser Darstellung $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ auch die *komplexe Ebene* (oder *komplexe Zahlenebene*, oder *Gaußsche Zahlenebene*) genannt, oft allerdings unter Einbezug der Struktur, die durch den Betrag (siehe unten 10.2) gegeben ist.

Die *Konjugation* $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist durch $\overline{z} := \mathrm{Re}\, z - i\mathrm{Im}\, z\,,\ z \in \mathbb{C}$, also durch $\overline{x + iy} = x - iy$ für $x, y \in \mathbb{R}$ gegeben. $\overline{z}$ ist die zu z *Konjugierte* oder auch *die konjugiert komplexe Zahl*.

Durch die Abbildung

$$\mathbb{R} \to \mathbb{C}\,,\ x \mapsto (x, 0) = x \cdot 1 = x\,,\ x \in \mathbb{R}$$

wird $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ als Körper eingebettet: Die Abbildung ist ein injektiver Körperhomomorphismus. $\mathbb{C}$ ist eine Körpererweiterung.

(10.1) Einfache Regeln: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

1°	$\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$	$\mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$	$\mathrm{Re}\,(z + w) = \mathrm{Re}\, z + \mathrm{Re}\, w$	$\mathrm{Im}\,(z + w) = \mathrm{Im}\, z + \mathrm{Im}\, w$
2°	$\overline{\overline{z}} = z$	$\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$	$\overline{(z + w)} = \overline{z} + \overline{w}$	$\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}\,,\ z \neq 0$

Anmerkung: $\mathbb{C}$ kann nicht zu einem angeordneten Körper angeordnet werden, weil $i^2 = -1$. Wäre $\mathbb{C}$ angeordnet, so müsste $i^2 > 0$ und $-1 < 0$ gelten.

Die Konvergenz von komplexen Zahlenfolgen wird daher mittels des Betrags definiert:

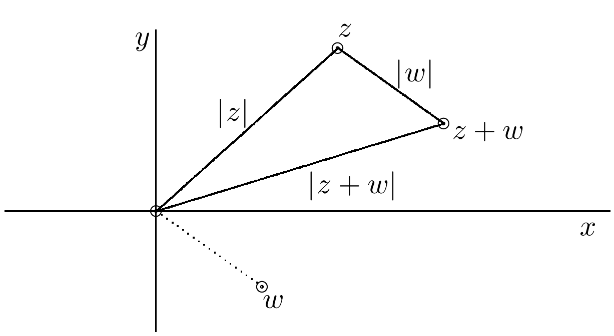
(10.2) Definition: (Absolutbetrag) Der *(Absolut-) Betrag* von $z \in \mathbb{C}$ ist $|z| := \sqrt{z\overline{z}}$. Also für $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Dieser Betrag induziert auf den rein reellen Zahlen $z = x \in \mathbb{R}$ denselben Betrag wie der in §7 definierte Betrag auf $\mathbb{R}$. Und er hat dieselben Eigenschaften:

Anmerkung: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist auch bekannt als die *euklidische Länge* in der euklidischen Ebene $\cong \mathbb{R}^2$.

(10.3) Satz: *Für alle* $z, w \in \mathbb{C}$ *gilt*

1° $|z| \geq 0$ und ($|z| = 0 \iff z = 0$).
2° $|z + w| \leq |z| + |w|$
3° $|zw| = |z|\,|w|$



Außerdem ist

$$\mathrm{Re}\, z \leq |\mathrm{Re}\, z| \leq |z| \leq \sqrt{2}\max\{|\mathrm{Re}\, z|\,, |\mathrm{Im}\, z|\}$$

und analog für $\mathrm{Im}\, z$*; und es gilt:*

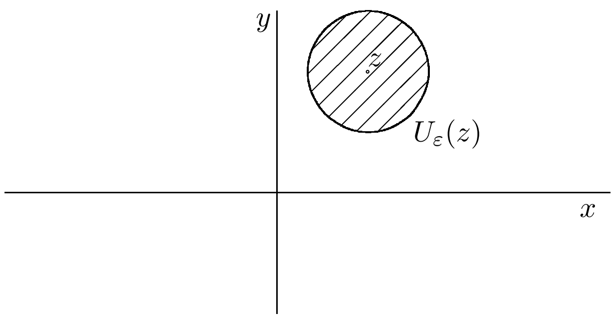
$|z - w| \geq ||z| - |w||$.

(10.4) Definition: Die offene ε-Umgebung $U_\varepsilon(z)$ eines Punktes $z \in \mathbb{C}$ der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ ist die offene Kreisscheibe um z mit dem Radius ε für $\varepsilon > 0$:

$$U_\varepsilon(z) := \{w \in \mathbb{C} \,:\, |z - w| < \varepsilon\} = z + \varepsilon\mathbb{E}$$

wobei $\mathbb{E}$ die offene Einheitskreisscheibe bezeichnet:

$$\mathbb{E} = \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < 1\,\} = \{(x, y) \in \mathbb{C} : x^2 + y^2 < 1\,\}$$



Eine komplexe Zahlenfolge (z_n), also $z_n \in \mathbb{C}$, heißt jetzt *konvergent gegen* (oder mit *Grenzwert*) $z \in \mathbb{C}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ stets $z_n \in U_\varepsilon(z)$ gilt, dh.

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\, \forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0} : |z_n - z| < \varepsilon\,.$$

In Zeichen $z_n \longrightarrow z$ oder $\lim z_n = z$.

Der bisherige Konvergenzbegriff in $\mathbb{R}$ ordnet sich der neuen Definiton unter (und hat seine natürliche Verallgemeinerung auf allgemeine normierte Räume, insbesondere auf $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{C}^m$, wie wir im kommenden Semester in der Vorlesung MII A sehen werden).

(10.5) Satz: *Für eine komplexe Zahlenfolge* (z_n) *sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1° (z_n) *ist konvergent.*
2° (z_n) *ist Cauchyfolge.*
3° $(\mathrm{Re}\, z_n)$ *und* $(\mathrm{Im}\, z_n)$ *konvergieren.*
Und es gilt im Falle 3°: $\lim z_n = \lim \mathrm{Re}\, z_n + i \lim \mathrm{Im}\, z_n$.

Beispiele:
(a^n) konvergiert für $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$, und für $a = 1$.
(a^n) divergiert für $a \in \mathbb{C}$, $|a| \geq 1$, $a \neq 1$.
Für $|a| < 1$ konvergiert die geometrische Reihe, dh. die Folge der Summen $s_n = \sum_{k=0}^{n} a^k$ konvergiert gegen $\frac{1}{1-a}$.

(10.6) Folgerung: $\mathbb{C}$ ist vollständig in folgendem Sinne: Jede Cauchyfolge in $\mathbb{C}$ konvergiert. ($\mathbb{C}$ ist *Cauchy-vollständig*.)

(10.7) Folgerung: (Permanenzeigenschaften) Für konvergente komplexe Zahlenfolgen $(a_n), (b_n)$ gilt:

1° $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$.
2° $\lim(a_n b_n) = \lim a_n \lim b_n$.
3° $b \neq 0 \Longrightarrow \lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$. [12.12.06]
4° $\lim \overline{a_n} = \overline{a}$, wenn $a = \lim a_n$.[1]

(10.8) Satz von Bolzano-Weierstrass: *Jede beschränkte Folge aus $\mathbb{C}$ hat einen Häufungswert in $\mathbb{C}$.*

Auch: Jede beschränkte Folge aus $\mathbb{C}$ hat eine konvergente Teilfolge (die dann gegen einen Häufungswert konvergiert).

Dazu müssen erst die entsprechenden Definitionen von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ verallgemeinert werden:

1° Eine Folge (a_n) aus $\mathbb{C}$ ist *beschränkt*, wenn die reelle Folge $(|a_n|)$ beschränkt ist, das heißt, wenn es ein $R > 0$ gibt mit $a_n \in U_R(0) = R\,\mathbb{E}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2° Eine komplexe Zahl $a \in \mathbb{C}$ ist *Häufungswert* der Folge (a_n), wenn für jedes $\varepsilon > 0$ unendlich viele Folgenglieder in $U_\varepsilon(a)$ liegen, das heißt, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \forall\, n \in N_m\, \exists\, k \in \mathbb{N}_n : a_k \in U_\varepsilon(a)$$

bzw.

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \forall\, n \in N_m\, \exists\, k \in \mathbb{N}_n : |a_k - a| < \varepsilon\,.$$

3° Eine *Teilfolge* einer Folge (a_n) aus $\mathbb{C}$ ist eine Folge (a_{n_k}) mit aufsteigenden Indizes $n_k < n_{k+1}$.

Konvergenz von Reihen mit komplexen Gliedern:

Eine *Reihe* $\sum a_j$ *mit komplexen Gliedern* besteht wieder (vgl. §9) aus zwei Folgen $(a_j)_{j \in \mathbb{N}_m}$, $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$, $a_n \in \mathbb{C}$, die in der Beziehung $s_n = \sum_{j=m}^{n} a_j$ stehen. Die Reihe heißt *konvergent*, wenn die Folge der *Partialsummen* (s_n) konvergiert, und man schreibt dann

$$\sum_{j=m}^{\infty} a_j := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=m}^{n} a_j$$

für den Summenwert der Reihe $\sum a_j$.

(10.9) Konvergenzkriterien: Es sei $\sum a_j$ eine Reihe.

(10.9.1°) Cauchykriterium: $\sum a_j$ konvergiert genau dann, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\, \forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0}\, \forall\, k \in \mathbb{N} : \left| \sum_{j=n}^{n+k} a_j \right| < \varepsilon\,.$$

(10.9.2°) Nullfolgenkriterium: (notwendiges Kriterium) Ist $\sum a_j$ konvergent, so ist (a_j) eine Nullfolge.

[1] In der Vorlesung nicht vorgetragen

(10.9.3°) Absolute Konvergenz: Ist $\sum a_j$ absolut konvergent, so konvergiert $\sum a_j$.

(10.9.4°) Majorantenkriterium: Wenn $|a_j| \leq Mc_j$, $j \in \mathbb{N}_m$ gilt für ein $M > 0$ und eine Folge $c_j \geq 0$ für die $\sum c_j$ konvergiert, so ist $\sum a_j$ absolut konvergent.

Analog hat man ein Minorantenkriterium.

(10.9.5°) Wurzelkriterium:
$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \implies \sum a_n$ konvergiert absolut.
$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \implies \sum a_n$ divergiert.

(10.9.6°) Quotientenkriterium:
$\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \implies \sum a_n$ konvergiert absolut.

(10.10) Beispiele:
1° Für $z \in \mathbb{C}$ ist $\sum \frac{1}{n!} z^n$ absolut konvergent nach dem Quotientenkriterium. Damit wird die komplexe *Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert:

$$\exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \,, \; z \in \mathbb{C} \,.$$

2° Für $z \in \mathbb{E}$ ist $\sum (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$ absolut konvergent nach dem Quotientenkriterium (oder auch nach dem Wurzelkriterium). Die Reihe beschreibt den *Hauptzweig des komplexen Logarithmus*

$$\mathrm{Log}\,(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} \,, \; z \in \mathbb{E} \,.$$

§11 Potenzreihen

Im folgenden sei $\mathbb{K}$ entweder der Körper $\mathbb{R}$ oder der Körper $\mathbb{C}$.

(11.1) Definition: Eine (formale) *Potenzreihe* mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$ ist ein Ausdruck der Form $\sum c_n T^n$, wobei die *Koeffizienten* c_n aus $\mathbb{K}$ sind für $n \in \mathbb{N}$, und T eine *Unbestimmte* ist.

Eine Potenzreihe $\sum c_n T^n$ konvergiert in $t \in \mathbb{K}$, wenn $\sum c_n t^n$ in $\mathbb{K}$ konvergiert.

Jede Potenzreihe konvergiert in $0 \in \mathbb{K}$. Es gibt viele Potenzreihen, die nur in 0 konvergieren. (Z.B $\sum n^n T^n$. Denn für $t \neq 0$ ist $\sqrt[n]{|n^n t^n|} = n\,|t|$, also divergiert die Reihe nach dem Wurzelkriterium.)

Eine (formale) Potenzreihe, die nur in 0 konvergiert, wird auch als *divergent* bezeichnet, entsprechend nennen wir eine (formale) Potenzreihe *konvergent*, wenn sie in mindestens einem $t \in \mathbb{K}$, $t \neq 0$, konvergiert.

Bemerkung: Das Zeichen T für die Unbestimmte ist ohne Bedeutung, statt T kann auch X oder Y geschrieben werden. Es ist also für feste c_n die Potenzreihe $\sum c_n T^n$ definitionsgemäß genau die gleiche Potenzreihe wie $\sum c_n X^n$. In der Regel schreiben wir die Unbestimmte als großen Buchstaben (T oder $X, Y, Z, ...$) und die eingesetzten Zahlen mit kleinem Buchstaben, z.B. $\sum c_n t^n$, $\sum c_n z^n$ .... Auch wenn $\sum c_n T^n$ und $\sum c_n X^n$ dieselben Objekte sind, gilt das keineswegs für $\sum c_n t^n$ und $\sum c_n z^n$, denn für verschieden Zahlenwerte t, z sind die Summenwerte natürlich in der Regel verschieden.

(11.2) Beispiele:

1° Polynome $p = \sum_{j=1}^{n} c_j T^j$ mit Koeffizienten c_n in $\mathbb{K}$ werden als Potenzreihen aufgefasst, indem $c_{n+k} = 0$ gesetzt wird für $k \in N_1$. Polynome sind in allen $t \in \mathbb{K}$ konvergent und definieren die zugehörige polynomiale Abbildung $p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $t \mapsto \sum_0^n c_n t^n =: p(t)$, die (wie hier) meistens mit demselben Symbol p bezeichnet wird.

2° $\sum T^n$ ist die geometrische Reihe als formale Potenzreihe ($c_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Wir wissen bereits, dass die geometrische Reihe

• im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ in allen $t \in]-1, 1[$ konvergiert und sonst divergiert,

• im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ in allen $z \in \mathbb{E}$, d.h. $|z| < 1$, konvergiert, und für $|z| > 1$ divergiert. Auch für $|z| = 1$ liegt Divergenz vor, denn für $|z| = 1$ ist auch $|z^n| = 1$, also kann (z^n) keine Nullfolge sein.

Für $|t| < 1$ ist $\sum_0^\infty t^n = (1-t)^{-1}$. Diese Aussage lässt sich auch folgendermaßen interpretieren: Die rationale Funktion $(1-t)^{-1}$ lässt sich (in Bezug auf $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) im Einheitsintervall $]0, 1[$ bzw. im Einheitskreis darstellen durch die geometrische Reihe.

3° Die *Exponentialreihe* als formale Potenzreihe $\sum \frac{1}{n!} T^n$ konvergiert in allen $t \in \mathbb{K}$ und definiert die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ (vgl. 10.10.1°). Die Logarithmusreihe $\sum (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n}$ (vgl. 10.10.2°) konvergiert für $|t| < 1$.

4° Die Potenzreihen

$$\sum (-1)^n \frac{T^{2n}}{(2n)!} \ , \ \sum (-1)^n \frac{T^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

konvergieren in allen $t \in \mathbb{K}$ und definieren die *Cosinusfunktion* bzw. die *Sinusfunktion*:

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \ , \ \sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \ , \ z \in \mathbb{K} ,$$

für den komplexen und zugleich auch für den reellen Fall.

(11.3) Satz: (Hadamard) *Sei* $f = \sum c_n T^n$ *eine Potenzreihe. Dann gilt:*

1° f *ist genau dann konvergent, falls* $(\sqrt[n]{|c_n|})$ *beschränkt ist.*

2° *Ist* $(\sqrt[n]{|c_n|})$ *beschränkt, so sei* $\rho = \rho_f := (\limsup \sqrt[n]{|c_n|})^{-1}$ *(mit dem Verständnis, dass* $\rho := \infty$ *im Falle* $\limsup \sqrt[n]{|c_n|}) = 0$*).*

ρ_f *ist der* Konvergenzradius *von* f *mit der folgenden Eigenschaft:*

• $|z| < \rho \implies \sum c_n z^n$ *konvergiert absolut und*

• $|z| > \rho \implies \sum c_n z^n$ *divergiert.* [15.12.06]

Insbesondere gilt: Wenn $\sum c_n T^n$ in $z \neq 0$ konvergiert, dann konvergiert $\sum c_n t^n$ auch für alle $t \in \mathbb{K}, |t| < |z|$.

[2] Leichter anzuwenden ist die Formel von Euler: $\rho_f = (\limsup \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|})^{-1}$, die aber nur angewendet werden kann, wenn die c_n nicht verschwinden für alle n ab einem n_0.

[2]nicht vorgetragen

(11.4) Beispiele: Grundsätzlich erfüllt der Bereich der Konvergenz einer formalen Potenzreihe f nach 11.3:

$$\{t \in \mathbb{K} : |t| < \rho_f\} \subset \{t \in \mathbb{K} : f \text{ konvergiert in } t\} \subset \{t \in \mathbb{K} : |t| \le \rho_f\}.$$

(Das gilt sogar für divergente Potenzreihen f, wenn wir $\rho_f = 0$ ($= (\limsup \sqrt[n]{|c_n|})^{-1}$) im Falle der Divergenz setzen.)

Die Konvergenz am „Rande", also für $|t| = \rho_f$, ist für jeden Einzelfall extra zu untersuchen. Zum Beispiel haben die folgenden drei Potenzreihen alle den Konvergenzradius 1:

1° Die geometrische Reihe $\sum T^n$ divergiert in allen $z \in \mathbb{K}$, $|z| = 1$.

2° Die Logarithmusreihe $\sum (-1)^{n+1} \frac{T^n}{n}$ konvergiert in allen $t \in \mathbb{K}$, $|t| = 1$, $t \neq -1$. Sie divergiert in -1.

3° Die Potenzreihe $\sum \frac{T^n}{n^2}$ konvergiert in allen $t \in \mathbb{K}$, $|t| = 1$.

(11.5) Bemerkung und Definition:

1° Eine formale Potenzreihe $\sum c_n T^n$ kann vollständig auf die Folge (c_n) der Koeffizienten reduziert werden. Allerdings steckt hinter der Reihenschreibweise eine Absicht, die im vorangehenden Satz offenbar wird. Eine konvergente Potenzreihe erweist sich als ein Rechenschema zur Darstellung oder Definition von Funktionen.

2° **Definition der Addition:** Mit der Auffassung der Potenzreihen als Folgen lässt sich die Definition der *Addition von Potenzreihen* der Addition von Folgen in Folgenräumen unterordnen:

$$\sum c_n T^n + \sum d_n T^n := \sum (c_n + d_n) T^n.$$

Das Resultat 11.3 sichert die folgende Aussage: Für zwei konvergente Potenzreihen $f = \sum c_n T^n$ und $g = \sum d_n T^n$ gilt für $t \in \mathbb{K}$, $|t| < \min\{\rho_f, \rho_g\}$ die Identität:

$$\sum_0^\infty c_n t^n + \sum_0^\infty d_n t^n = \sum_0^\infty (c_n + d_n) t^n.$$

Das bedeutet, dass die gerade eingeführte Addition von Potenzreihen genau der Addition der durch die Potenzreihen gegebenen Funktionen entspricht: Ist $h = f + g$, also $h = \sum (c_n + d_n) T^n$, so gilt $\rho_h \ge \min\{\rho_f, \rho_g\}$ nach 11.3.2°. Bezeichnen wir die Funktionswerte in t von f, g, h jeweils mit $\hat{f}(t), \hat{g}(t), \hat{h}(t)$, also $\hat{f}(t) := \sum_0^\infty c_n t^n$, $\hat{g}(t) := \sum_0^\infty d_n t^n$, $\hat{h}(t) := \sum_0^\infty (c_n + d_n) t^n$, so bedeutet die Addition der Funktionswerte $\hat{f}(t) + \hat{g}(t) = \hat{h}(t)$ für $|t| < \min\{\rho_f, \rho_g\}$, also der Addition der Funktionen $\hat{f}(t), \hat{g}(t), \hat{h}(t)$.

3° **Definition der Multiplikation:** Als Multiplikation ist es allerdings verfehlt, die komponentenweise Multiplikation von Folgen als maßgebend zu betrachten. Die *Multiplikation der Potenzreihen* kommt aus der Verwendung zur Beschreibung von Funktionen, wie wir das schon für Polynome (und für die Addition von Potenzreihen in 2°) kennen gelernt haben:

$$\sum c_n T^n \cdot \sum d_n T^n := \sum \left(\sum_{k=0}^n c_k d_{n-k} \right) T^n.$$

Die Gesamtheit der formalen Potenzreihen wird damit zu einer Algebra über $\mathbb{K}$. Die Multiplikation ist die, die auch bei den formalen Laurentreihen benutzt wird.

Dass konvergente Potenzreihen zu Funktionen führen, und dass die Summe von zwei konvergenten Potenzreihen wieder eine Potenzreihe ist, folgt aus dem Satz 11.3. Dass das auch für die Multiplikation gilt, und dann die zur Addition (vgl. 2°) analoge Identität richtig ist (nämlich $\hat{f}(t)\hat{g}(t) = \hat{k}(t)$ für das Produkt $k = fg$ der Potenzreihen fg und für $|t|$ klein genug), ist Thema des nächsten Paragraphen.

§12 Cauchyprodukt und Additionstheorem

In Verallgemeinerung des Produkts von Potenzreihen nach 11.5.3° definiert man für zwei Reihen $\sum a_n, \sum b_n$ ($n \in \mathbb{N}$) das *Cauchyprodukt* der beiden Reihen als

$$\sum c_n \ , \quad c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{j+k=n} a_j b_k \, .$$

(12.1) Satz: Seien $\sum a_n, \sum b_n$ ($n \in \mathbb{N}$) konvergente Reihen mit $a = \sum_0^\infty a_n$, $b = \sum_0^\infty b_n$, und es sei $\sum a_n$ absolut konvergent. Dann ist das Cauchyprodukt $\sum c_n$ konvergent und es gilt

$$\sum c_n = ab \, , \quad \text{also } ab = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \, .$$

Ist neben $\sum a_n$ auch $\sum b_n$ absolut konvergent, so ist auch das Cauchyprodukt $\sum c_n$ absolut konvergent.

[[**Beweis:**[3] Setze $s_n := \sum_{i=0}^n a_i$, $t_n := \sum_{j=0}^n b_j$, $r_n := \sum_{k=0}^n c_k$, sowie $\Delta_n := r_n - s_n b$. Es gilt $\lim s_n b = ab$ nach 10.7. Daher ist die Behauptung des Satzes ($\lim r_n = ab$) äquivalent zu $\lim \Delta_n = 0$. Wir zeigen nun: $\Delta_n \longrightarrow 0$. Vorweg:

Behauptung: $r_n = \sum_{k=0}^n a_k t_{n-k}$. Beweis dieser Behauptung durch Induktion nach n. Für $n = 0$ ist $r_0 = a_0 b_0$ und $\sum_0^0 a_k t_{0-k} = a_0 b_0$, also ist der Induktionsbeginn gesichert. Für den Induktionsschritt $n \mapsto n+1$ sieht man zunächst $r_{n+1} = r_n + c_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k t_{n-k} + c_{n+1}$ nach Induktionsvoraussetzung, also $r_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k (t_{n-k} + b_{n+1-k}) + a_{n+1} b_0$ wegen $c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k b_{n+1-k}$. Daher $r_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k t_{n+1-k} + a_{n+1} t_0 = \sum_0^{n+1} a_k t_{n+1-k}$, und der Induktionsschritt ist vollzogen.

Jetzt zu $\Delta_n \longrightarrow 0$: Aufgrund der Behauptung gilt $\Delta_n = \sum_0^n a_k (t_{n-k} - b)$. Mehrfache Anwendung der Dreiecksungleichung ergibt die wichtige Abschätzung (für $n \in \mathbb{N}$):

$$(*) \quad |\Delta_n| \le \sum_{k=0}^{n} |a_k| \, |t_{n-k} - b| \ .$$

Die Folgen $(b - t_n)$ und $(\sum_0^n |a_j|)$ sind konvergent, also beschränkt. Es gibt daher eine Konstante $M > 0$ mit $|b - t_n| \le M$ und $\sum_0^m |a_j| \le M$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es jetzt wegen der Konvergenz ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ stets

$$(**) \quad |t_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{und} \quad \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

gilt. Es folgt unter Verwendung von (*):

$$\Delta_n \le \sum_{0}^{n_0} |a_k| \max\{|t_{n-k} - b| \mid k \le n_0\} + \sum_{k=n_0}^{n} |a_k| \max\{|t_{n-k} - b| \mid n_0 < k \le n\}$$

[3] Nicht in der Vorlesung vorgetragen

Für $n \in \mathbb{N}$, $n > 2n_0$ (das ist der Trick) erfüllt für $0 \le k \le n_0$ der Index $n-k \ge n-n_0 \le n_0$, also ist im linken Summanden von (**) stets $|t_{n-k} - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Der linke Summand ist daher wegen $\sum_0^{n_0} |a_j| \le M$ insgesamt kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$. Ähnlich ist auch der rechte Summand in (**) kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$, weil $\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2M}$ und $|t_{n-k} - b| \le M$. Es folgt $\Delta_n < \varepsilon$ für alle $n > 2n_0$, und das war zu zeigen.]]

(12.2) Additionstheorem: Für alle $z, w \in \mathbb{K}$ gilt

$$\exp(z+w) = \exp z \exp w\,.$$

(12.3) Eigenschaften der Exponentialfunktion:

1° $\exp(z+w) = \exp z \exp w$ bedeutet für $z = w = 1$ wegen $e = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} = \exp 1$ zunächst $\exp 2 = \exp 1 \exp 1 = e^2$ und daher auch für $n \in \mathbb{N}$: $\exp n = e^n$. Diese letzte Identität behält wegen 12.2 ihre Richtigkeit auch für ganze Zahlen und für rationale $r \in \mathbb{Q}$: $\exp r = e^r$. Mit der Fortsetzung der Potenzfunktion $r \mapsto a^r$, $r \in \mathbb{Q}$, wobei $a > 0$ ist, auf ganz $\mathbb{R}$ durch

$$a^x := \sup\{a^r \,|\, r \in \mathbb{Q}\,,\, r < x\,\}\,,\ x \in \mathbb{R}\,,$$

gilt auch $\exp x = e^x$; dazu muss allerdings gezeigt werden, dass $\lim \exp r_n = \exp x$ gilt für rationale Folgen $r_n \to x$. Das ist die Stetigkeit der Exponentialfunktion, die wir im nächsten Kapitel behandeln.

Die weitere Fortsetzung der Potenzfunktion $x \mapsto a^x$ auf komplexe Zahlen z anstelle von x (z.B. über die Binomialreihe) ergibt ebenfalls $\exp z = e^z$. Daher ist die Notation e^z bzw. e^x anstelle von $\exp z$ bzw. $\exp x$ gebräuchlich.

2° Es ist $(e^z)^{-1} = e^{-z}$ und $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$ für $z \in \mathbb{C}$.

3° Es gilt $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ für $z \in \mathbb{C}$.

4° Insbesondere gilt für reelle $t \in \mathbb{R}$: $e^{it} = \cos t + i \sin t$ mit $\cos t, \sin t \in \mathbb{R}$. Ferner $(e^{it})^{-1} = e^{-it} = \overline{e^{it}}$, also $e^{it}\overline{e^{it}} = 1$. e^{it} liegt also für alle $t \in \mathbb{R}$ auf der Kreislinie $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} \ : |z| = 1\,\}$. Es folgt unter anderem die bekannte Identität: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. [19.12.06]

5° Umgekehrt kann gezeigt werden, dass zu jedem $z \in \mathbb{S}$ eine eindeutig bestimmte reelle Zahl $\phi \in [0, 2\pi[$ mit $z = e^{i\phi}$ gewählt werden kann. Wir brauchen dazu die Aussage, dass $\cos : [0, 2\pi[\to]\,0, 1\,]$ surjektiv ist, und das können wir erst mit Hilfe der Untersuchungen über stetige Funktionen im nächsten Kapitel herleiten.

6° Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ hat dann eine eindeutige Darstellung der Form $z = re^{i\phi}$ mit $r = |z|$ (*Polarkoordinaten*, Beweis in §15). Die Multiplikation von zwei beliebigen komplexen Zahlen $z = re^{i\phi}$, $w = se^{i\psi}$ (wobei $r, s, \phi, \psi \in \mathbb{R}$) ist dann

$$zw = rse^{i(\phi+\psi)}\,.$$

Die Multiplikation von komplexen Zahlen $z = e^{i\phi}, w = e^{i\psi}$ aus $\mathbb{S}$ entspricht also einfach der Addition der Winkel ϕ, ψ.

7° Das drückt sich auch darin aus, dass die natürliche Abbildung

$$\hat{e} : \mathbb{R} \to \mathbb{S}\,,\quad t \mapsto e^{it}$$

ein Homomorphismus von der additiven Gruppe $\mathbb{R}$ in die multiplikative Gruppe $\mathbb{S}$ ist: $\hat{e}(s+t) = \hat{e}(s)\hat{e}(t)$ oder – weniger aufwendig – $e^{i(s+t)} = e^{is}e^{it}$ jeweils für $s, t \in \mathbb{R}$. Ebenso hat man die surjektiven Homomorphismen

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\} \text{ und } \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+\,,$$

wobei $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\,\}$.

8° Aus dem Additionstheorem 12.2 ergeben sich Additionstheoreme für $\sin$ und $\cos$:

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w\ ,\ \sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w\,.$$

Einige Lehrbücher zur Begleitung der Vorlesung:

Forster, O.: Analysis 1 – 3
Königsberger, K.: Analysis 1,2
Walter, W.: Analysis 1,2

Rudin, W.: Analysis
Bröcker, Th.: Analysis 1,2
Lang, S. Undergraduate Analysis

Heuser, H.: Lehrbuch der Analysis 1,2
Storch, U. / Wiebe, H.: Lehrbuch der Mathematik 1,2
Fischer, H. / Kaul, H.: Mathematik für Physiker 1 – 3
Hellwig, K.-E. / Wegner, B.: Mathematik und theoretische Physik 1,2

Barner, M. / Flohr, F.: Analysis 1,2
Blatter, C.: Analysis 1 – 3
Courant, R.: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung 1,2
Dieudonné, J.: Grundzüge der Analysis 1 – 9

Dedekind, R.: Was sind und was sollen die Zahlen?
Landau, E.: Grundlagen der Analysis
Ebbinghaus et alii: Zahlen