Version 12.12. Oktober 2006

MIA – Analysis einer reellen Veränderlichen – WS 06/07

Kurzfassung

Martin Schottenloher

$\infty\,\infty\,\infty$

Kapitel I. Natürliche Zahlen

§1 Vollständige Induktion

(1.1) Beweisprinzip der vollständigen Induktion: Eine Aussage $\mathcal{E}(n)$ ist richtig für alle natürlichen Zahlen n, wenn folgendes gilt:

- $\mathcal{E}(0)$ ist richtig. *(Induktionsanfang)*
- Für jede natürliche Zahl n kann $\mathcal{E}(n+1)$ aus $\mathcal{E}(n)$ hergeleitet werden. *(Induktionsschritt)*

Die zweite Bedingung hat auch die folgende Formulierung: Unter der Hypothese $\mathcal{E}(n)$ *(Induktionsvoraussetzung)* kann für jede natürliche Zahl n die Aussage $\mathcal{E}(n+1)$ bewiesen werden.

Sprechweise: Induktion *nach* n
Schematisch: Zeige $\mathcal{E}(0)$; zeige $\mathcal{E}(n) \Rightarrow \mathcal{E}(n+1)$.
Oder: $n = 0$; $n \to n+1$. [17.10.06]

(1.2) Satz: $2^n > n$ *für alle natürlichen Zahlen* n.

(1.3) Satz: *Für alle natürlichen Zahlen* n *gilt:* $0 + 1 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

(1.4) Satz: *Für alle natürlichen Zahlen* n *gilt:* $1 + 3 + ... + (2n+1) = (n+1)^2$.

(1.5) Satz: *Für alle natürlichen Zahlen* n *gilt:* $0^2 + 1^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

(1.6) Notation:

- Die Menge $\{0, 1, 2, 3, ...\}$ der natürlichen Zahlen wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet.
- „$\forall\, n \in \mathbb{N}$“ ist Abkürzung für „*Für alle natürlichen Zahlen* n“.
- „$\exists n \in \mathbb{N}$“ ist Abkürzung für „*Es gibt eine natürliche Zahl* n“.

(1.7) Satz: (Geometrische Summenformel) *Sei* x *eine reelle Zahl* $x \neq 1$.

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : 1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

(1.8) Satz: (Bernoulli-Ungleichung) *Sei* x *eine reelle Zahl* $x \geq -1$.

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : (1 + x)^n \geq 1 + nx$$

(1.9) Rekursive Definition I: Die Vorschrift

- Festlegung von a_0 (als Objekt, Zahl, Element, ...)
- F_n (Rechenschritt, Schema, Abbildung, ...)

liefert eine *Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch die *Definition*

a_0 wie oben vorgegeben und $a_{n+1} := F_n(a_n)$ (oder allgemeiner $a_{n+1} := F_n(a_0, a_1, \dots a_n)$).

Beispielsweise (jeweils für $n \in \mathbb{N}$):

1° **Potenz:** $x^0 := 1$; $x^{n+1} := (x^n)\,x$ für reelle Zahlen x.

2° **Summenzeichen:**

$$\sum_{k=0}^{0} b_k := b_0 \; ; \; \sum_{k=0}^{n+1} b_k := (\sum_{k=0}^{n} b_k) + b_{n+1}$$

für reelle Zahlen b_k.

3° **Produktzeichen:**

$$\prod_{k=0}^{0} b_k := b_0 \; ; \; \prod_{k=0}^{n+1} b_k := (\prod_{k=0}^{n} b_k) b_{n+1}$$

für reelle Zahlen b_k. [20.10.06]

4° **Fakultät:**

$$0! := 1 \; ; \; (n+1)! := n!(n+1)$$

(1.10) Satz: *$n!$ ist die Anzahl der Anordnungen von n verschiedenen Objekten, d.h. die Anzahl der Möglichkeiten, die Elemente einer n-elementigen Menge in einer Reihe anzuordnen* ($n \in \mathbb{N}$).

(1.11) Folgerung: *$n!$ ist die Anzahl der Permutationen einer n-elementigen Menge* ($n \in \mathbb{N}$).

(1.12) Definition: (Verallgemeinerter Binomialkoeffizient) Für eine reelle Zahl α setze

$$\binom{\alpha}{0} := 1 \; ; \; \binom{\alpha}{k+1} := \frac{\alpha - k}{k+1}\binom{\alpha}{k}, \; k \in \mathbb{N}.$$

(1.13) Satz:

1° *Für jede reelle Zahl α gilt:*

$$\forall\, k \in \mathbb{N} : \binom{\alpha}{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}\prod_{\mu=0}^{k}(\alpha - \mu)\,.$$

2°

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\; \forall\, k \in \mathbb{N} : k \le n \Rightarrow \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}\,.$$

3° *Für natürliche Zahlen $k \le n$ ist die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge gerade der Binomialkoeffizient*

$$\binom{n}{k}\,.$$

4° *Für jede reelle Zahl α gilt:*

$$\forall\, k \in \mathbb{N} : \binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1}.$$

5° *Für natürliche Zahlen $m \le n$ gilt stets:*

$$\sum_{k=0}^{n-m} \binom{k+m}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

(1.14) Satz: (Der binomische Lehrsatz) *Für beliebige reelle Zahlen x, y gilt für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k .$$

(1.15) Varianten des Beweisprinzips der vollständigen Induktion: Sei $p \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und $\mathbb{N}_p := \{n \in \mathbb{N} | n \ge p\}$. [24.10.06]

1° $\mathcal{E}(n)$ sei formuliert für alle n aus $\mathbb{N}_p$. Dann gilt $\mathcal{E}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_p$, wenn gezeigt werden kann:

- $\mathcal{E}(p)$ (*Induktionsanfang*)
- $\forall\, n \in \mathbb{N}_p : \mathcal{E}(n) \;\Rightarrow\; \mathcal{E}(n+1)$ (*Induktionsschritt*)

2° Entsprechend wird die *rekursive Definition* ausgedehnt auf Folgen, die mit einer Zahl $p \in \mathbb{N}$ beginnen: $(a_n)_{n \ge p}$. a_p durch Festsetzung und $a_{n+1} := F_n(a_n)$ oder $a_{n+1} := F_n(a_p, a_{p+1}, \dots a_n)$.

3° Weitere Variante: $\mathcal{E}(n)$ sei formuliert für alle n aus $\mathbb{N}_p$. Dann gilt $\mathcal{E}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_p$, wenn gezeigt werden kann:

- $\mathcal{E}(p)$ (*Induktionsanfang*)
- $\forall\, n \in \mathbb{N}_p : \mathcal{E}(p) \wedge \mathcal{E}(p+1) \wedge \dots \wedge \mathcal{E}(n) \;\Rightarrow\; \mathcal{E}(n+1)$ (*Induktionsschritt*)

(1.16) Beispiele:

1° $\forall\, n \in \mathbb{N}_5 : 10n \le n!$

2° $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$; $\sum_{k=p}^{m} a_k = a_p + a_{p+1} + \dots + a_m$. Im Falle $n < p$ wird

$$\sum_{k=p}^{n} a_k := 0$$

gesetzt (*Leere Summe*).

3° Aus 1.3, 1.4 ergeben sich $\forall\, n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$; $\forall\, n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$.

4° 1.13.5° ist $\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$.

5° $\prod_{k=p}^{m} a_k = a_p a_{p+1} \dots a_m$. Im Falle $n < p$ wird

$$\prod_{k=p}^{n} a_k := 1$$

gesetzt (*Leeres Produkt*).

(1.17) Satz: (Primzahlzerlegung) *Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_2$ hat eine Zerlegung (bzw. Produktdarstellung) der Form*

$$n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_m^{r_m} = \prod_{\mu=1}^{m} p_\mu^{r_\mu}$$

mit: p_μ ist die μ-te Primzahl, $m \in \mathbb{N}$, und die $r_\mu \in \mathbb{N}$ sind geeignete Exponenten.

Bemerkung: Die Zerlegung ist eindeutig, das bedeutet, dass die Zahlen $m \in \mathbb{N}$ und $r_\mu \in \mathbb{N}$, mit $r_m \neq 0$, durch n bestimmt sind und Funktionen $m, r_\mu : N_2 \to \mathbb{N}$ liefern.

(**Achtung:** Diese Eindeutigkeitsaussage wurde in der Vorlesung nicht bewiesen.)

§2 Peano-Axiome

(2.1) PEANO-Axiome: Ein *System natürlicher Zahlen* ist eine Menge $\mathbb{M}$ zusammen mit einem Element $e \in \mathbb{M}$ und einer Abbildung $S : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$, so dass die folgenden Axiome erfüllt sind:

P.1 S ist injektiv.

P.2 $e \notin S(\mathbb{M})$.

P.3 Für jede Teilmenge $B \subset \mathbb{M}$ gilt: Aus $e \in B$ und $S(B) \subset B$ folgt stets $B = \mathbb{M}$.

(2.2) Bemerkungen: 1° P.3 entspricht dem Prinzip der vollständigen Induktion und heißt daher auch das *Induktionsaxiom*.

2° $\mathbb{M} = \{e\} \cup S(\mathbb{M})$.

3° e ist das *Anfangselement*, S ist die *Nachfolgerfunktion*, $S(x)$ ist der *Nachfolger* von $x \in \mathbb{M}$. Insbesondere: $S(e) \neq e$ nach Axiom P.2, $S(S(e)) \neq S(e)$ nach Axiom P.1, usw. Insgesamt:

4° $\forall\, x \in \mathbb{M} : S(x) \neq x$.

5° Modelle für Systeme natürlicher Zahlen:

i)	$\mathbb{M} : e, S(e), S(S(e)), S(S(S(e))), \dots$	$x \mapsto S(x)$
ii)	$\mathbb{M} : \vert = e, \vert\vert, \vert\vert\vert, \dots$	$S(\vert\vert \dots \vert\vert) = \vert\vert \dots \vert\vert\vert$
iii)	$\mathbb{M} : e = \emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots$	$S(x) = \{x\}$
iv)	$\mathbb{M} = \mathbb{N}_k : e = k, k+1, k+2, \dots$	$S(x) = x + 1$

6° Zur Existenz (eines Systems natürlicher Zahlen):

i) Modelltheoretisch nach ii) oder iv).

ii) Aus der Mengenlehre nach iii). Die Existenz eines Systems mit P.1–P.3 entspricht in der Mengenlehre dem Unendlichkeitsaxiom. [27.10.06]

7° Konsistenz: Widerspruchsfreiheit des Systems ist gewährleistet.

8° Minimalität. Zu jedem $j \in \{1, 2, 3\}$ gibt es ein System $(\mathbb{M}_j, e_j, S_j)$, welches die beiden Axiome P.k, $k \in \{1, 2, 3\} \backslash \{j\}$, erfüllt aber P.$j$ verletzt. Also ist das Axiomensystem P.1 – P.3 minimal (nicht verkürzbar).

9° Unvollständigkeit: Kurt Gödel 1906*.

(2.3) Satz: (Eindeutigkeit) *Alle Systeme natürlicher Zahlen sind* strukturgleich *in folgendem Sinne: Seien die Systeme natürlicher Zahlen* $(\mathbb{M}, e, S)$ *und* $(\mathbb{M}^*, e^*, S^*)$ *vorgegeben. Dann existiert eine eindeutig bestimmte bijektive Abbildung*

$$\varphi : \mathbb{M} \to \mathbb{M}^*$$

mit den folgenden Eigenschaften:

$$\varphi(e) = e^* \text{ und } \forall\, x \in \mathbb{M} : \varphi(S(x)) = S^*(\varphi(x)), \text{ d.h. } S^* \circ \varphi = \varphi \circ S.$$

Im Folgenden verwenden wir in der Regel das Modell $\mathbb{N}$ mit der Null als Anfangselement e und mit $S(n) = n + 1$ als Nachfolgerfunktion (oder auch $\mathbb{N}_p$).

Trotz des Symbols „+“ in $S(x) = x + 1$ ist aber die Addition nicht definiert, wenn wir $\mathbb{N}$ als ein Modell für die Peanoaxiome verwenden und sonst nichts voraussetzen, ebensowenig die Multiplikation. Daher müssen diese Operationen wie auch die Ordnungsrelation noch definiert werden:

(2.4) Satz – Definition: Auf dem System der natürlichen Zahlen ist (mit der Notation $0 = e$, $1 = S(0)$ und $S(x) = x + 1$) durch

- $x + 0 := x$
- $x + S(y) := S(x + y)$ (oder $x + (y + 1) := (x + y) + 1$)

für alle $x, y \in \mathbb{N}$ eine Addition $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert, die die folgenden Regeln (Axiome) erfüllt: $\forall\, x, y, z \in \mathbb{N}$:

A.1	$(x + y) + z = x + (y + z)$	(Assoziativitätsgesetz)
A.2	$x + y = y + x$	(Kommutativitätsgesetz)
A.3	$x + 0 = x$	(0 ist *neutrales Element* der Addition.)

(2.5) Satz – Definition: Auf dem System der natürlichen Zahlen ist durch

- $x \cdot 1 := x$
- $x \cdot S(y) := x \cdot y + x$ (oder $x \cdot (y + 1) := (x \cdot y) + x$)
- $x \cdot 0 := 0$

für alle $x, y \in \mathbb{N}$ eine Multiplkation $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert, die die folgenden Regeln (Axiome) erfüllt: $\forall\, x, y, z \in \mathbb{N}$:

M.1	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	(Assoziativitätsgesetz)
M.2	$x \cdot y = y \cdot x$	(Kommutativitätsgesetz)
M.3	$x \cdot 1 = x$	(1 ist *neutrales Element* der Multiplikation.)
D	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$	(Distributivgesetz)

Statt $x \cdot y$ schreiben wir im Folgenden meist xy.

(2.6) Satz: $\forall\, k, m, n \in \mathbb{N}$:

1° $(k + m)n = kn + mn$
2° $k + m = k + n \Rightarrow m = n$
3° $k \neq 0 : km = kn \Rightarrow m = n$

(2.7) Satz – Definition: *Zu jedem Paar* $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *von natürlichen Zahlen mit* $x \neq y$ *gibt es eine weitere natürliche Zahl* $k \in \mathbb{N}$ *mit*

$$x + S(k) = y \quad \text{oder} \quad y + S(k) = x\,.$$

Im ersten Fall sprechen wir von $x < y$ *(*x ist kleiner als y*), und im zweiten Fall von* $y < x$ *oder (gleichbedeutend damit)* $x > y$*. Wir haben damit die* Ordnung *(oder auch* Ordnungsrelation*) auf* $\mathbb{N}$ *definiert mit den folgenden Eigenschaften (Axiomen):* $\forall\, x, y, z \in \mathbb{N}$*:*

O.1	$x < y, y < z \Rightarrow x < z$	(Transitivität)
O.2	$x < y \text{ oder } x = y \text{ oder } x > y$	(Trichotomie, „oder“ im Sinne von „aut“)
O.3	$x < y \Rightarrow x + z < y + z$	(Kompatibilität mit der Addition)
O.4	$z > 0, x < y \Rightarrow xz < yz$	(Kompatibilität mit der Multiplikation)[31.10.06]

Außerdem: $z \neq 0 \Leftrightarrow z > 0$

Notationen: $x \leq y :\Leftrightarrow x = y \text{ oder } x < y$; analog „$\geq$ “.

(2.8) Wohlordnungssatz: *Jede nichtleere Teilmenge* $M \subset \mathbb{N}$ *hat ein* erstes Element*, d.h. ein* $a \in M$ *mit:* $\forall\, x \in M : a \leq x$*.*

(2.9) Bemerkung: Die Aussage des Wohlordnungssatzes ist äquivalent zum Prinzip der vollständigen Induktion.

(2.10) Rekursive Definition II: Es seien Mengen M_n für $n \in \mathbb{N}_p$ ($p \in \mathbb{N}$) gegeben mit Abbildungen $g_n : M_p \times M_{p+1} \times \ldots \times M_n \to M_{n+1}$. Dann wird durch die Wahl eines Elementes $a_p \in M_p$ und durch $a_{n+1} := g_n(a_p, a_{p+1}, \ldots, a_n)$ eine eindeutig bestimmte Folge $(a_n)_{n \geq p}$ mit $a_n \in M_n$ definiert.

(2.11) Definition:

1° Zwei Mengen X, Y heißen *gleichmächtig*, wenn es eine Bijektion $f : X \to Y$ gibt.

2° Eine Menge M heißt *endlich*, wenn es eine Bijektion $f : A(k) \to M$ für eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt. Dabei ist $A(k) := \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq k\}$ der *Abschnitt* der ersten n natürlichen Zahlen ab 1. X heißt *unendlich*, falls X nicht endlich ist.

(2.12) Satz: *Die* Mächtigkeit *einer endlichen Menge* M *ist eindeutig bestimmt. Das heißt, dass für bijektive Abbildungen* $f : A(k) \to M$ *und* $g : A(k') \to M$ *gilt:* $k = k'$*.*

Notation: $k := \#M$ ist dann die *Anzahl* der Elemente von M.

(2.13) Satz: *Für jede Menge* M *gilt*

1° M *endlich* $\Leftrightarrow\ \exists\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, f : A(k) \to M$ *surjektiv* $\Leftrightarrow\ \exists\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, g : M \to A(k)$ *injektiv*

2° M *unendlich* $\Leftrightarrow\ \forall\, k \in \mathbb{N}\ \forall\, f : A(k) \to M$ *nicht surjektiv* $\Leftrightarrow\ \forall\, k \in \mathbb{N}\ \forall\, g : M \to A(k)$ *nicht injektiv*

3° M *unendlich* $\Leftrightarrow\ \exists\, f : \mathbb{N} \to M$ *injektiv* $\Leftrightarrow\ \exists\, g : M \to \mathbb{N}$ *surjektiv*

§3 Aufbau des Zahlensystems

1. Schritt: Von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$.

Subtraktion: Die eindeutig bestimmte Lösung x von $m + x = n$ (im Falle $m \leq n$, $m, n \in \mathbb{N}$) schreibt man auch $x := n - m$: „*Von n wird m subtrahiert.*“

Im Falle $m > n$ ist die Subtraktion $n - m$ in $\mathbb{N}$ nicht möglich.

Um die Subtraktion uneingeschränkt zu ermöglichen, wird das System der natürlichen Zahlen erweitert zu dem Bereich der „*ganzen Zahlen*“ $\mathbb{Z}$:

(3.1) Definition: $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{-m : m \in \mathbb{N}_1\}$

Die Addition wird folgendermaßen auf $\mathbb{Z}$ ausgedehnt: $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$ sei

- $n + (-m) := n - m =: -m + n$, wenn $m \leq n$, und
- $n + (-m) := -(m - n) =: -m + n$, wenn $m > n$ (mit der Konvention $-0 := 0$).

(3.2) Satz: Es gelten in $\mathbb{Z}$ die Regeln A.1, A.2, A.3 sowie

A.4 $\quad \forall\, (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\ \exists x \in \mathbb{Z} : m + x = n$

$\mathbb{Z}$ ist daher eine abelsche Gruppe in Bezug auf die Addition.

Die Multiplikation lässt sich ebenfalls auf $\mathbb{Z}$ ausdehnen, durch

- $n(-m) := -mn =: (-m)n$ für $m, n \in \mathbb{N}$,

und macht $\mathbb{Z}$ zu einem Ring.

Schließlich hat auch die Ordnungsrelation eine natürliche Fortsetzung nach $\mathbb{Z}$ (vgl. 3.3).

2. Schritt: Von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Q}$.

Division: Die eindeutig bestimmte Lösung x von $nx = z$ (im Falle dass $n \in \mathbb{N}_1$ Teiler von z bzw. $-z$ ist) schreibt man auch als Bruch $x := \frac{z}{n}$: „*z wird durch n dividiert.*“

In vielen Fällen ist die Division $\frac{r}{s}$ in $\mathbb{Z}$ nicht möglich.

Um die Division uneingeschränkt für Nenner $n \neq 0$ zuzulassen, wird das System der ganzen Zahlen erweitert zu dem Bereich der „*rationalen Zahlen*“ $\mathbb{Q}$:

Naiv gesehen nehmen wir die Menge $\tilde{\mathbb{Q}}$ aller Brüche $\frac{z}{n}$ mit $z \in \mathbb{Z}$ und $n \in N_1$ als die Menge der rationalen Zahlen. Allerdings stellen zwei solche Brüche $\frac{z}{n}$ und $\frac{y}{m}$ dieselbe Zahl dar, wenn $mz = ny$ gilt. Wir haben dadurch eine Äquivalenzrelation auf $\tilde{\mathbb{Q}} := \{\frac{z}{n} \,|\, z \in \mathbb{Z}, n \in N_1\}$ gegeben:

$$\frac{z}{n} \sim \frac{y}{m} \;:\Leftrightarrow\; mz = ny$$

[3.11.06]

Die Äquivalenzklasse zu $\frac{z}{n}$ werde mit $\left[\frac{z}{n}\right] := \{\frac{y}{m} \in \tilde{\mathbb{Q}} : \frac{z}{n} \sim \frac{y}{m}\}$ bezeichnet.

Wir identifizieren nun je zwei Brüche, welche dieselbe Zahl darstellen, und setzen daher:

(3.3) Definition: $\mathbb{Q} := \tilde{\mathbb{Q}}/_\sim$ ist die Menge der rationalen Zahlen. Addition, Multiplikation und Ordnungsrelation werden repräsentantenweise definiert: $\forall\, z, y \in \mathbb{Z}\ \forall\, n, m \in \mathbb{N}_1$:

- $\left[\dfrac{z}{n}\right] + \left[\dfrac{y}{m}\right] := \left[\dfrac{zm + yn}{nm}\right]$
- $\left[\dfrac{z}{n}\right]\left[\dfrac{y}{m}\right] := \left[\dfrac{zy}{nm}\right]$
- $\left[\dfrac{z}{n}\right] < \left[\dfrac{y}{m}\right] \ :\Leftrightarrow\ zm < yn$

(3.4) Satz: *Es gelten in $\mathbb{Q}$ die Regeln A.1 – A.4, M.1 – M.3 und D, O.1–O.4 sowie*

M.4 $\forall\,(r, s) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \,:\, r \neq 0 \ \Rightarrow\ \exists\, x \in \mathbb{Q} : rx = s$

Damit ist der Bereich $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen sukzessive zu einem angeordneten Körper $\mathbb{Q}$ erweitert worden.

3. Schritt: Von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$.

Aber $\mathbb{Q}$ ist in vieler Hinsicht unvollständig. Beispielsweise:

(3.5) Satz: *Es gibt keine rationale Zahl r mit $r^2 = 2$.*

Selbst wenn man alle „Wurzeln“ aus positiven Zahlen (also ξ mit $\xi^n = s$, $s \in \mathbb{Q}$, $s > 0$) hinzufügt (beispielsweise $n = 2, s = 2$ zu $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, und weiter mit $s = 3, s = 5$ zu $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ etc.), hat der so entstehende Körper $\mathbb{A}$ (*der algebraischen Zahlen*) noch Unvollständigkeiten (z.B. $e \notin \mathbb{A}$, $\pi \notin \mathbb{A}$), die erst im Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen geschlossen werden. $\mathbb{R}$ wird im nächsten Kapitel axiomatisch beschrieben.

Will man allerdings das in diesem Paragraphen begonnene Programm weiterführen, so kann man folgendermaßen vorgehen: Ausgehend von $\mathbb{Q}$ lässt sich $\mathbb{R}$ durch unterschiedliche Ansätze in einer zu den Schritten 1 und 2 analogen Weise konstruieren:

1. $\mathbb{R}$ als Menge der rationalen Cauchyfolgen (geeignet identifiziert) oder
2. $\mathbb{R}$ als Menge der Dedekindschen Schnitte oder
3. $\mathbb{R}$ als Menge von Dezimalbruchentwicklungen.

Dieser Zugang zu den reellen Zahlen ist kompliziert und vor allem zeitaufwendig, und wird daher in dieser Vorlesung nicht weiter verfolgt.

Literatur dazu:

Landau: Grundlagen der Analysis
Hermes et alii: Zahlen, Springer-Verlag 1992.