Oktober 2005

Geometrie nichtlinearer Feldtheorien

Martin Schottenloher WS 05/06

1 Kinematik und Dynamik der reinen Yang-Mills-Theorie

Zur Beschreibung der reinen Yang-Mills-Theorie haben wir als feste (dh. absolute) Größen eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit M und eine Lie-Gruppe G:

1. M ist eine orientierte semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit M der Dimension n mit einer Metrik $g \in \Gamma(M, T^*M \otimes T^*M)$. Das heißt, M ist eine (beliebig oft differenzierbare) Mannigfaltigkeit der Dimension n mit einer festen Orientierung (zum Beispiel gegeben durch einen Teilatlas des maximalen Atlanten aus lauter orientierungserhaltenden Karten) mit dem Tangentialbündel TM und dem Kotangentialbündel $T^*M = (TM)^*$. Zu einem differenzierbaren Vektorbündel E auf M (also $\pi : E \to M$) wie zum Beispiel TM oder $T^*M \otimes T^*M$ ist $\Gamma(M, E)$ der Raum der (unendlich oft) differenzierbaren Schnitte in diesem Bündel, also die Menge der differenzierbaren Abbildungen $s : M \to E$ mit $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$. Einen Schnitt $g \in \Gamma(M, T^*M \otimes T^*M)$ nennen wir (semi-Riemannsche) Metrik, wenn für alle Punkte $a \in M$ der Wert $g_a := g(a) \in T_a^*M \otimes T_a^*M = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_aM \times T_aM)$ symmetrisch und nichtausgeartet ist. Wenn g_a stets positiv definit ist, heißt g Riemannsche Metrik und (M, g) heißt Riemannsche Mannigfaltigkeit.

In der Regel wird M auch noch zusammenhängend sein. Aus technischen Gründen wird M gerne als kompakt vorausgesetzt. Wenn das aus der physikalische Situation heraus nicht gegeben ist, so kann man sich gelegentlich mit der 1-Punkt-Kompaktifizierung $\hat{M}$ von M behelfen, indem man noch verlangt, dass die wesentlichen geometrischen oder physikalischen Daten von M nach $\hat{M}$ differenzierbar fortsetzbar sind und dort eventuell noch einer festen Vorgabe genügen. Das entspricht Randbedingungen.

2. $G \subset \mathrm{GL}(m, \mathbb{K})$ ist eine Matrixgruppe, das heißt eine abgeschlossene Untergruppe der Gruppe $\mathrm{GL}(m, \mathbb{K})$ der invertierbaren $m \times m$-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. G ist somit eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{GL}(m, \mathbb{K})$ und daher eine Lie-Gruppe (dh. differenzierbare Mannigfaltigkeit und Gruppe, so dass die Multiplikation und die Inversenbildung differenzierbar sind). Die zugehörige Lie-Algebra $\mathrm{Lie}\,(G)$ ist $\mathrm{Lie}\,(G) = \mathfrak{g} := \left\{X \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{K}^m) : e^{tX} \in G \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\right\}$ mit dem Kommutator $[X, Y] := XY - YX$ als Lie-Klammer.

Auf $\mathfrak{g}$ ist noch eine symmetrische, nichtausgeartete und $\mathbb{R}$-bilineare Form $\beta : \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ vorgegeben, die *bi-invariant* ist, d.h. für die $\beta(gXg^{-1}, gYg^{-1}) = \beta(X,Y)$ für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$ und alle $g \in G$ gilt.

Für den Fall der vollen Endomorphismenalgebra

$$\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^m) = \mathrm{Lie}\,\mathrm{GL}(m,\mathbb{K}) = \mathfrak{gl}(m,\mathbb{K}) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{K}^m)$$

wird durch die Spur $\mathrm{tr} : \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V) \cong V^* \otimes V \to \mathbb{R}\,,\ \ (\lambda, v) \mapsto \lambda(v)$, eine solche Form β gegeben: $\beta(X,Y) := \mathrm{tr}(X \circ Y)$. Auf diese Weise liefert jede Darstellung $R : \mathfrak{g} :\to \mathrm{GL}(m,\mathbb{K})$ eine geeignete Form β_R, nämlich $\beta_R(X,Y) := \mathrm{tr}(R(X), R(Y))$, die sogenannte *Spurform*. Die Form β_R ist nichtausgeartet, wenn die Darstellung R treu, d.h. injektiv, ist. Als eine Standardform hat man daher bei einer Matrixgruppe $G \subset \mathrm{GL}(m,\mathbb{K})$ immer die Restriktion der oben beschriebenen, auf $\mathfrak{gl}(m,\mathbb{K})$ gegebenen Form $\beta = \mathrm{tr}$ auf die Unteralgebra $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(m,\mathbb{K})$, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\,G$, die dann auch meist mit tr bezeichnet wird.

Ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach als Lie-Algebra, so ist die Killingform $\kappa(X,Y) := \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y)$ nichtausgeartet , wobei $\mathrm{ad}_X(Y) := [X,Y]$ für $X, Y \in \mathfrak{g}$ (κ ist offensichtlich für jede Lie-Algebra bi-invariant, $\mathbb{R}$-bilinear und symmetrisch).

Im Falle einer kompakten Gruppe G findet man eine positiv definite, bi-invariante und symmetrische Bilinearform auf $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\,(G)$ durch invariante Integration auf G.

3. Zu den Vorgaben M und G (mit g und β) betrachtet man alle Prinzipalfaserbündel (P, M, G, π) mit Totalraum P, Basis M, Strukturgruppe G und Projektion $\pi : P \to M$. Auf P liegt noch eine differenzierbare Rechtsaktion $\Psi : P \times G \to P$ vor, die wir auch in der Form

$$\mu_g : P \to P,\ \mu_g(p) := \Psi(p, g)$$

für $(p, g) \in P \times G$ verwenden, und für die wir oft $pg = \mu_g(p)$ schreiben. π ist differenzierbar, surjektiv, invariant (d.h. $\pi(pg) = \pi(g)$) mit Fasern $P_a := \pi^{-1}(a)$ isomorph zu G.

Nach Definition hat das Prinzipalfaserbündel außerdem noch genügend viele lokale Trivialisierungen, die äquivariant sind. Das bedeutet, dass es zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung U in M und einen Diffeomorphismus $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ gibt mit

- $pr_1 \circ \phi = \pi|_{\pi^{-1}(U)}$ (ϕ ist *Trivialisierung über* U).
- $\phi(pg) = \phi(p)g$ bezüglich der trivialen Rechtsaktion $(a, h)g := (a, hg)$ (ϕ ist *äquivariant*).

Der Konfigurationsraum der reinen Yang-MIlls-Theorie ist der Raum $\mathcal{A} = \mathcal{A}(P)$ der (prinzipalen) Zusammenhänge auf P, also

$$\mathcal{A} := \left\{\omega \in \mathcal{A}^1(P, \mathfrak{g}) : \omega \ \ \text{erfüllt} \ \ (\omega 1), (\omega 2)\right\}$$

mit den Bedingungen

($\omega 1$) $\omega_p(X_p^*) = X$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ und alle $p \in P$,

($\omega 2$) $\omega_{pg}(T_p\mu_g(Y)) = g^{-1}\omega_p(Y)g$ für alle $(p,g) \in P \times G$ und $Y \in T_pP$ (ω ist *ad-äquivariant*).

Dabei ist $X_p^* := [pe^{tX}]_p \in T_pP$ der durch die Kurve pe^{tX} gegebene Tangentialvektor, und $p \mapsto X_p^*$ ist das *Fundamentalfeld* $X^* \in \Gamma(P, TP)$ zu $X \in \mathfrak{g}$. Und $Tf : TN \to TN'$ ist die Tangentialabbildung (Ableitung) einer differenzierbaren Abbildung $f : N \to N'$, also $T_bf(v) := [f(\alpha(t))]_{f(b)}$, wenn die Kurve $\alpha(t)$ den Tangentialvektor $v \in T_bN$ im Punkte $b \in N$ an N definiert: $v = [\alpha(t)]_b$.

Ein Zusammenhang bestimmt eine direkte Zerlegung $TP = H \oplus V$ des Tangentialbündels TP in einen *horizontalen Anteil* $H := H^\omega := \operatorname{Ker}\omega$ und in den festen *vertikalen Anteil* $V := \operatorname{Ker} T\pi$. H und V sind Vektorbündel und zwar Unterverktorbündel von TP. V hat auch die Beschreibung $V_p = \left\{X_p^* : X \in \mathfrak{g}\right\}$.

4. Der Konfigurationsraum $\mathcal{A} = \mathcal{A}(P)$ ist ein affiner Raum. Denn für zwei Zusammenhangsformen $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{A}$ gilt: Die Differenz $\delta := \omega_1 - \omega_2$ verschwindet auf V (dh. ist *horizontal*) und δ ist ad-äquivariant. Und die Menge

$$\bar{\mathcal{A}}^k_{\mathrm{ad}}(P, \mathfrak{g}) := \left\{\eta \in \mathcal{A}^k(P, \mathfrak{g}) : \eta \ \text{ horizontal und ad-äquivariant}\right\}$$

der horizontalen und zugleich äquivarianten k-Formen ist ein Untervektorraum (sogar ein $\mathcal{E}(M)$-Untermodul) von $\mathcal{A}^k(P, \mathfrak{g})$. Daher gilt

$$\mathcal{A} = \omega_1 + \bar{\mathcal{A}}^1_{\mathrm{ad}}(P, \mathfrak{g}).$$

Die Kinematik der reinen Yang-Mills-Theorie ist also linear.

Im nachfolgendem 2. Paragraphen wird im übrigen gezeigt: Zwischen $\bar{\mathcal{A}}^k_{\mathrm{ad}}(P, \mathfrak{g})$ und $\mathcal{A}^k(M, \mathrm{ad}P)$ gibt es einen natürlichen Isomorphismus, wobei das Vektorbündel $\mathrm{ad}P$ auf M das zur adjungierten Darstellung

$$\mathrm{ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}),\ \ \mathrm{ad}(g)(X) := gXg^{-1},$$

assoziierte Vektorbündel mit Faser $\mathfrak{g}$ ist. Insgesamt also:

$$\mathcal{A} = \omega_1 + \bar{\mathcal{A}}^1_{\mathrm{ad}}(P, \mathfrak{g}) \cong \omega_1 + \mathcal{A}^1(M, \mathrm{ad}P)\,.$$

5. Die Yang-Mills-Dichte ist

$$\mathcal{L}(\omega) := \mathcal{L}_{YM}(\omega) := -\frac{1}{4}\left\|\Omega^\omega\right\|^2\ ,\ \omega \in \mathcal{A}.$$

Hier ist Ω^ω die Krümmung von ω: $\Omega^\omega = d\omega + \omega \wedge \omega$ (vgl. 1.3) und $\|.\|$ wird durch g und β (vgl. 1.) auf folgende Weise induziert:

Zunächst stellt man fest, dass $\Omega := \Omega^\omega$ ad-äquivariant ist: Für alle $g \in G$ gilt $\mu_g^*\Omega = g^{-1}\Omega g$. Also gilt $\Omega \in \bar{\mathcal{A}}^2_{\mathrm{ad}}(P, \mathfrak{g})$. Lokal sei jetzt über einer offenen Menge U ein Schnitt $\sigma : U \to P$ im Prinzipalfaserbündel gegeben: $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_U$. Dann hat $F := \sigma^*\Omega \in \mathcal{A}^1(U, \mathfrak{g})$ die bezüglich lokaler Koordinaten q^i auf U eindeutige Darstellung

$$F = F_{ij}\, dq^i \wedge dq^j \quad \text{mit} \quad F_{ij} \in \mathcal{E}(U, \mathfrak{g})\,;$$

antisymmetrisch in den Indizes i, j.

Setze

$$\|\Omega\|^2\,|_U = (\Omega, \Omega)\,|_U := \beta(F_{ij}, g^{ik} g^{jl} F_{kl})$$

Dann ist die rechte Seite der Gleichung unabhängig von der Wahl der Karte wegen des Transformationsverhaltens der Formen dq^i und der Koeffizienten F_{ij}, und sie ist auch unabhängig von der Wahl des Schnittes σ: Denn für einen weiteren Schnitt (dh. für eine andere lokale Eichung) $\sigma' : U \to P$ gilt $\sigma' = \sigma \circ g$ für eine differenzierbare Abbildung $g : U \to G$ (*lokale Eichtransformation*). Wegen der Äquivarianz von Ω gilt dann für $F' := (\sigma')^*\Omega$: $F' = g^{-1}Fg$ und damit $F'_{ij} = g^{-1}F_{ij}g$. Weil β bi-invariant ist (vgl. 1.), folgt die Wohldefiniertheit von $\|\Omega\|^2\,|_U$. Damit ist auch $\|\Omega\|^2$ auf ganz M definiert.

■

Die Dynamik der reinen Yang-Mills-Theorie ist jetzt gegeben durch die Variation des Wirkungsfunktionals

$$S : \mathcal{A} \to \mathbb{R}\,, \quad S(\omega) = S_{YM}(\omega) := \int_M \mathcal{L}_{YM}(\omega)\mathrm{vol},$$

wobei "vol" das durch die Metrik und die Orientierung gegebene Volumenmaß ist. Da wir eine lineare Kinematik vorliegen haben, bedeutet das

Definition 1.1 *Die Bewegungen des Systems sind die stationären Punkte von S, also die $\omega \in \mathcal{A}$ mit*

$$\frac{d}{d\varepsilon} S(\omega + \varepsilon\eta)|_{\varepsilon=0} = 0$$

für alle $\eta \in \bar{\mathcal{A}}^1_{\mathrm{ad}}(P, \mathfrak{g}) \cong \mathcal{A}^1(M, \mathrm{ad}P)$.

Zur Beschreibung der entstehenden Bewegungsgleichungen ist die kovariante Ableitung $D = D^\omega$ zum Zusammenhang ω und ihre Adjungierte $(D^\omega)^*$ von Nutzen. Denn es gilt:

Satz 1.2 *Die Bewegungsgleichungen der reinen Yang-Mills-Theorie sind*

$$D^*\Omega = 0.$$

Genauer: $(D^\omega)^*\Omega^\omega = 0$.

Im Folgenden werden $D = D^\omega$ und $(D^\omega)^*$ beschrieben und es werden die Bewegungsgleichungen hergeleitet.

Die in 3. beschriebene Zerlegung von TP erfüllt

(ω1) $TP = H \oplus V\ ,\ H^\omega = H = \operatorname{Ker}\omega$.

(ω2) $T_p\mu_g(H_p)) = H_{pg}$ für alle $(p, g) \in P \times G$.

Und sie definiert eine Projektion $h : TP \to TP$, also einen Vektorbündelhomomorphismus h mit $h \circ h = h$, der $\operatorname{Im} h = H$ und $\operatorname{Ker} h = V$ erfüllt. Eine solche Projektion h wiederum induziert eine Projektion $h^* : \mathcal{A}^k(P, W) \to \mathcal{A}^k(P, W)$ für einen Vektorraum (oder allgemeiner ein Vektorbündel), also hier eine $\mathcal{E}(P)$-Lineare Abbildung mit $h^* \circ h^* = h^*$: $h^*\eta(X_1, X_2, ..., X_k) = \eta(h(X_1)), h(X_2)), ..., h(X_k))).$

Die kovariante Ableitung ist dann durch

$$D = D^\omega := h^* \circ d$$

definiert, wobei d die äußere Ableitung auf den Differentialformen ist. Damit hat man für Differentialformen auf P vom Grad k mit Werten in einem endlichdimensionalen Vektorraum W die Operatoren

$$D : \mathcal{A}^k(P, W) \to \mathcal{A}^{k+1}(P, W)$$

gegeben (und analog für Vektorbündel-wertige Differentialformen). Insbesondere wird auf den Funktionen $f \in \mathcal{E}(P) = \mathcal{A}^0(P)$ ($W = \mathbb{R}$ und $k = 0$) die kovariante Ableitung $D : \mathcal{E}(P) \to \mathcal{A}^1(P)$ bestimmt mit den folgenden Eigenschaften: Für alle $f, f_1, f_2 \in \mathcal{E}(P)$, alle $X \in \mathfrak{g}$, alle $g \in G$ und alle $f_0 \in \mathcal{E}(M)$ hat man

- $(Z1)$ $D(f_1 + f_2) = Df_1 + Df_2$,
- $(Z2)$ $D(f_1 f_2) = (Df_1)f_2 + f_1 Df_2$,
- $(Z3)$ $Df(X^*) = 0$,
- $(Z4)$ $\mu_g^* \circ D = D \circ \mu_g^*$,
- $(Z5)$ $D(f_0 \circ \pi) = df_0 \circ T\pi$.

Umgekehrt bestimmt jedes D mit $(Z1) - (Z5)$ einen Zusammenhang ω auf P mit $D = D^\omega$.

Die eigentliche Definition der Krümmung ist $\Omega^\omega := D^\omega\omega$. Allerdings hat die oben getroffene Festlegung ihren Sinn wegen der folgenden Tatsache:

Satz 1.3 *(Strukturgleichungen)*

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$$

Beweis: Es muss also $D^\omega \omega = d\omega + \omega \wedge \omega$ gezeigt werden.

Für horizontale Vektorfelder X, Y gilt $\omega(X) = \omega(Y) = 0$ und $h(X) = X, h(Y) = Y$. Also $D\omega(X, Y) = d\omega(X, Y)$.

Für vertikale Vektorfelder der Form X^*, Y^* mit $X, Y \in \mathfrak{g}$ gilt zunächst $D\omega(X^*, Y^*) = d\omega(0, 0) = 0$. Nach Definition von $d\omega$ ist

$$d\omega(X^*, Y^*) = L_{X^*}\omega(Y^*) - L_{Y^*}\omega(X^*) - [\omega(X^*), \omega(Y^*)]\,,$$

also $d\omega(X^*, Y^*) = -[X, Y]$, weil $\omega(X^*) = X$ konstant ist, und dasselbe für Y gilt. Schließlich ist allgemein $\alpha \wedge \beta(Z_1, Z_2) := \alpha(Z_1)\beta(Z_2) - \alpha(Z_2)\beta(Z_1)$ nach Definition, also gilt $\omega \wedge \omega(X^*, Y^*) = [\omega(X^*), \omega(Y^*)] = [X, Y]$. Insgesamt: $d\omega(X^*, Y^*) + [\omega(X^*), \omega(Y^*)] = -[X, Y] + [X, Y] = 0$, also $D\omega(X^*, Y^*) = d\omega(X^*, Y^*) + [\omega(X^*), \omega(Y^*)]$.

Für ein horizontales Vektorfeld X und ein vertikales Vektorfeld Y^* auf P ist zunächst $D\omega(X, Y^*) = d\omega(X, 0) = 0$. Wie oben sieht man $d\omega(X, Y^*) = -L_{Y^*}\omega(X) - [\omega(X), Y] = 0$ wegen $\omega(X) = 0$ und $\omega \wedge \omega(X, Y^*) = [\omega(X), \omega(Y^*)] = 0$.

Die Behauptung folgt jetzt aus der Bilinearität von Ω. ■

Die Bianchi-Identität folgt direkt daraus:

Folgerung 1.4 *(Bianchi-Identität)*

$$D\Omega = 0$$

Denn $d\Omega = d(d\omega + \omega \wedge \omega) = dd\omega + d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega$ nach 4.3. Also gilt $D\Omega = h^* \circ d\Omega = 0$ wegen $dd\omega = 0$ und $h^*(d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega) = 0$ (denn ω verschwindet auf den horizontalen Vektoren). ■

An dieser Stelle ist es hilfreich, an die Definition von $\alpha \wedge \beta$ für Differentialformen $\alpha \in \mathcal{A}^r(P, \mathfrak{g}), \beta \in \mathcal{A}^s(P, \mathfrak{g})$ zu erinnern. Es handelt sich einfach um die Multiplikation der Matrizen vermöge $\wedge$, also: $\alpha \wedge \beta$ wird durch die Matrix $((\alpha \wedge \beta)^\sigma_\rho)$ dargestellt, wobei $(\alpha \wedge \beta)^\sigma_\rho := \alpha^\sigma_\tau \wedge \beta^\tau_\rho$ gilt $(1 \leq \rho, \sigma, \tau \leq \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g})$ mit $\alpha = (\alpha^\sigma_\tau)$ und $\beta = (\beta^\tau_\rho)$.

Es gilt offenbar

$$\alpha \wedge \beta(X, Y) + \beta \wedge \alpha(X, Y) = [\alpha(X), \beta(Y)] + [\beta(X), \alpha(Y)]$$

für $\alpha, \beta \in \mathcal{A}^1(P, \mathfrak{g})$, also

$$\alpha \wedge \alpha(X, Y) = [\alpha(X), \alpha(Y)]$$

sowie

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta - \alpha \wedge d\beta.$$

Diese Beschreibung ist nur für Matrixgruppen möglich. Im Falle einer allgemeinen Lie-Gruppe G mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ verwendet man die Lie-Klammer $[\,.\,,.\,]$ der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, und überträgt sie auf $\mathfrak{g}$-wertige Formen:

Für $\alpha \in \mathcal{A}^r(P,\mathfrak{g})$, $\beta \in \mathcal{A}^s(P,\mathfrak{g})$ und Vektorfelder $Y_1, Y_2, .., Y_k \in \Gamma(P,TP)$ sowie mit $k = r+s$ setze man:

$$[\alpha,\beta](Y_1,Y_2,...,Y_k) := \frac{1}{r!s!}\sum_{\sigma\in S_k} \mathrm{sgn}\sigma[\alpha(Y_{\sigma(1)},Y_{\sigma(2)},...,Y_{\sigma(r)}),\beta(Y_{\sigma(r+1)},...,Y_{\sigma(k)})]$$

Es gilt dann

$[\alpha,\beta] = -(-1)^{rs}[\beta,\alpha]$,

$d[\alpha,\beta] = [d\alpha,\beta] - (-1)^r[\alpha,d\beta]$,

$[\alpha,\beta] = \alpha\wedge\beta - (-1)^{rs}\beta\wedge\alpha$ im Falle einer Matrixgruppe,

$[\alpha,\beta] = \alpha\wedge\beta + \beta\wedge\alpha$ und $[\alpha,\alpha] = 2(\alpha\wedge\alpha)$ für 1-Formen α,β.

Die Strukturgleichungen erhalten damit die Form

Folgerung 1.5

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega].$$

Zur Herleitung der Bewegungsgleichungen ist noch die folgende Formel nützlich, die genauso wie die Strukturgleichungen bewiesen wird:

Satz 1.6 *Für Basisformen* $\alpha \in \bar{\mathcal{A}}^1_{\mathrm{ad}}(P,\mathfrak{g})$ *gilt*

$$D^\omega\alpha = d\alpha + \omega\wedge\alpha + \alpha\wedge\omega = d\alpha + [\alpha,\omega].$$

Zum **Beweis** der Bewegungsgleichungen $D^*\Omega = 0$:

Zu einem Zusammenhang $\omega \in \mathcal{A}$ und $\alpha \in \bar{\mathcal{A}}^1_{\mathrm{ad}}(P,\mathfrak{g})$ ist

$$\Omega^{\omega+\epsilon\alpha} = D^{\omega+\epsilon\alpha}(\omega+\epsilon\alpha),$$

also

$$\Omega^{\omega+\epsilon\alpha} = d(\omega+\epsilon\alpha) + (\omega+\epsilon\alpha)\wedge(\omega+\epsilon\alpha)$$

$$= d(\omega + \omega \wedge \omega) + \epsilon(d\alpha + \omega \wedge \alpha + \alpha \wedge \omega) + \epsilon^2 \alpha \wedge \alpha$$

$$= \Omega^\omega + \epsilon D^\omega \alpha + \epsilon^2 \alpha \wedge \alpha$$

Daher bedeutet

$$\frac{d}{d\epsilon} S(\omega + \epsilon\alpha)|_{\epsilon=0} = -\frac{1}{4} \int_M \frac{d}{d\epsilon} \left\| \Omega^{\omega+\epsilon\alpha} \right\|^2 |_{\epsilon=0} \mathrm{vol} = 0,$$

dass für alle (vernünftigen) α die Bedingung $\int_M (\Omega^\omega, D^\omega \alpha)\mathrm{vol} = 0$ gelten muss. Mit dem oben eingeführten Skalarprodukt für 2-Formen aus $\bar{\mathcal{A}}^2_{\mathrm{ad}}(P, \mathfrak{g})$ und dem analogen Skalarprodukt auch auf 1-Formen aus $\bar{\mathcal{A}}^1_{\mathrm{ad}}(P, \mathfrak{g})$ lässt sich zu $T : \bar{\mathcal{A}}^1_{\mathrm{ad}}(P, \mathfrak{g}) \to \bar{\mathcal{A}}^2_{\mathrm{ad}}(P, \mathfrak{g})$ der (formal) adjungierte Operator $T^* : \bar{\mathcal{A}}^2_{\mathrm{ad}}(P, \mathfrak{g}) \to \bar{\mathcal{A}}^1_{\mathrm{ad}}(P, \mathfrak{g})$ durch

$$\int_M (T^*\eta, \alpha)\mathrm{vol} = \int_M (\eta, T\alpha)\mathrm{vol}$$

definieren. Also hier

$$\int_M ((D^\omega)^*\eta, \alpha)\mathrm{vol} = \int_M (\eta, D^\omega\alpha)\mathrm{vol}.$$

Es folgt dann die eigentliche Bewegungsgleichung $(D^\omega)^*\Omega^\omega = 0$ aus der Identität

$$\int_M ((D^\omega)^*\Omega^\omega, \alpha)\mathrm{vol} = \int_M (\Omega^\omega, D^\omega\alpha)\mathrm{vol} = 0$$

für alle α. ■

Zusammen mit den (immer erfüllten) Bianchi-Gleichungen sind die Bewegungsgleichungen daher

$$\boxed{(D^\omega)^*\Omega^\omega = 0 \quad \text{und} \quad D^\omega\Omega^\omega = 0,}$$

und ähneln in dieser Schreibweise den (quellenfreien) Maxwell-Gleichungen.

Wie sieht der Operator $(D^\omega)^*$ aus? Die Riemannsche Metrik zusammen mit der Orientierung definiert den Hodge-Operator

$$* : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{n-k}(M)$$

($n = \dim_{\mathbb{R}} M$) mit $* \circ * = -1$ oder $* \circ * = 1$ auf $\mathcal{A}^k(M)$. Der Hodge-Operator kann (unter der Verwendung der bi-invarianten Form β auf $\mathfrak{g}$) fortgesetzt werden auf $\mathrm{ad}P$-wertige Formen

$$* : \mathcal{A}^k(M, \mathrm{ad}P) \to \mathcal{A}^{n-k}(M, \mathrm{ad}P)$$

und gibt so auch einen Hodge-Operator

$$* : \bar{\mathcal{A}}^k_{\mathrm{ad}}(P, \mathfrak{g}) \to \bar{\mathcal{A}}^{n-k}_{\mathrm{ad}}(P, \mathfrak{g}).$$

Es gilt jetzt

$$D^{\omega *} = (-1)^d * D^\omega *,$$

wobei $d \in \mathbb{N}$ von der Dimension n und der Signatur der Metrik auf M abhängt.

Zum Schluss wollen wir sehen, wie die Gleichungen lokal aussehen.

Die Krümmungsform $\Omega = \Omega^\omega$, $\omega \in \mathcal{A} = \mathcal{A}(P)$, werde bezüglich eines lokalen Schnittes $\sigma : U \to P$ über einer offenen Teilmenge $U \subset M$ zurückgezogen zur *Feldstärke* $F := \sigma^*\Omega \in \mathcal{A}^2(U, \mathfrak{g})$, die zum Potenzial $A := \sigma^*\omega \in \mathcal{A}^1(U, \mathfrak{g})$ gehört.

In lokalen Koordinaten gilt zunächst $A = A_j dq^j$ mit $A_j \in \mathcal{E}(U, \mathfrak{g})$, und es folgt:

$$F = F_{ij} dq^i \wedge dq^j = dA + A \wedge A$$

mit

$$F_{ij} = A_{i,j} - A_{j,i} + [A_i, A_j]$$

nach Definition der Krümmung. Dabei ist "$..,j$" die partielle Ableitung nach der Variablen q^j.

Die eigentlichen YM-Gleichungen (mit der Wahl $\beta = \mathrm{tr}$) haben in diesem Rahmen die Form

$$g^{ik} F_{ij,k} + [g^{ik} A_k, F_{ij}] = 0 \quad \text{oder}$$
$$D^i F_{ij} := F_{ij}{}^{,i} + [A^i, F_{ij}] = 0,$$

und erweisen sich so als hochgradig nichtlinear.

Die Bianchi-Identität dazu:

$$D_{[i} F_{jk]} := F_{[ij,k]} + [A_{[i}, F_{jk]}] = 0.$$

Kurz:

$$\boxed{D^i F_{ij} = 0 \quad \text{und} \quad D_{[i} F_{jk]} = 0\,.}$$

Über die Lösungen der Yang-Mills-Gleichungen gibt es im allgemeinen wenig Resultate.

Im vierdimensionalen Fall liefert der Hodge-Operator eine kanonische Abbildung $* : \mathcal{A}^2(M, \mathfrak{g}) \to \mathcal{A}^2(M, \mathfrak{g})$. Damit ist eine Vereinfachung der Yang-Mills-Gleichungen möglich:

Definition 1.7 *Eine Zusammenhangsform ω heißt selbstdual (bzw. antiselbstdual), wenn für die zugehörige Feldstärke $F \in \mathcal{A}^2(M, \mathfrak{g})$ die Identität $*F = F$ (bzw. $*F = -F$) gilt.*

Duale oder selbstduale ω sind immer Lösungen der Yang-Mills-Gleichungen, wie man an der Bianchi-Identität sofort abliest. Im Falle des vierdimensionalen euklidischen Raumes $M = \mathbb{R}^4$ gibt es eine vollständige Übersicht über die dualen und selbstdualen Lösungen, die eine endliche Wirkung $S_{YM}(\omega)$ haben (Instantonen). Zunächst lassen sich nach einem Resultat von K. Uhlenbeck die Instantonen nach $\mathbb{S}^4$ (Einpunktkompaktifizierung) fortsetzen. Sie beschreiben dann einen Zusammenhang auf einen Prinzipalfaserbündel über $\mathbb{S}^4$, das auch nichttrivial sein kann. Im Falle $G = \mathrm{SU}(N)$ werden die möglichen Bündel durch eine Zahl aus $\mathbb{Z}$ klassifiziert, die sich aus der Krümmung ergibt: Das ist die 2. Chernzahl

$$c_2(P) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{S}^4} \mathrm{tr}(F \wedge F) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{E}^4} (F_{ij}, *F^{ij}) \,.$$

$k(\omega) = k := \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{E}^4} (F_{ij}, *F^{ij})$ wird als die Instantonenladung von ω bezeichnet. Atiyah, Hitchin und Singer haben 1978 gezeigt, dass der Modulraum der selbstdualen Instantonen zur Ladung $k \in \mathbb{N}$ im Falle von $G = \mathrm{SU}(2)$ in natürlicher Weise eine $8k-3$-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.