

## Several Complex Variables

Vorlesung im Sommersemester 2004, vierstündig mit Übungen

Es handelt sich bei dieser Vorlesung um eine Einführung in die Funktionentheorie in mehreren komplexen Veränderlichen. Die Vorlesung ist ausdrücklich auch für den Masterstudiengang gedacht und wird daher in Englisch gehalten, sofern nicht alle Teilnehmer den jeweiligen Vortrag in deutscher Sprache vorziehen.

Zum Inhalt: Es werden zunächst in der ersten Hälfte der Vorlesung die Unterschiede zur Funktionentheorie in einer Veränderlichen herausgestellt: Vor allem das Phänomen der simultanen analytischen Fortsetzung, das in einer Veränderlichen nicht auftritt und das seine Anwendungen in der Physik hat, und die Tatsache, dass es in  $\mathbb{C}^2$  viele verschiedene einfach zusammenhängende und beschränkte Gebiete gibt, die nicht biholomorph äquivalent sind.

Beispielsweise lassen sich alle holomorphen Funktionen auf der offenen Kugelschale  $C_r = \{z \in \mathbb{C}^n : r < \|z\| < 1\}$  für  $1 > r > 0$  auf die ganze offene Einheitskugel  $B = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| < 1\}$  analytisch (d.h. als holomorphe Funktion) fortsetzen. Und die Einheitskugel  $B$  ist nicht biholomorph abbildbar auf das  $n$ -fache Produkt der Einheitskreisscheiben ( $n > 1$ ).

Daneben wird ausführlich auf die Potenzreihenentwicklung von holomorphen Funktionen in Produkten von Kreisscheiben und allgemeineren (Reinhardtschen) Gebieten sowie auf Integraldarstellungen von holomorphen Funktionen eingegangen. Zu den Basiseigenschaften von holomorphen Funktionen gehört auch das lokale Verhalten, das bedeutet, der Ring der holomorphen Funktionskeime wird betrachtet aus Sicht der kommutativen Algebra, um u.a. verschiedene Endlichkeits- und Teilbarkeitseigenschaften zu studieren. Um zur globalen Theorie zu gelangen, verwendet man Prinzipien der homologischen Algebra.

Nach diesem ersten Teil der Vorlesung wird – je nach Wunsch der Hörer – in der zweiten Hälfte das Levi-Problem studiert oder es werden Grundtatsachen über komplexe Mannigfaltigkeiten und Vektorbündel dargestellt. Das Levi-Problem handelt von der Charakterisierung von Holomorphiegebieten  $G$  im  $\mathbb{C}^n$  durch lokale Eigenschaften des Randes  $\partial G$  des jeweiligen Gebietes. Dabei ist ein Holomorphiegebiet ein Gebiet  $G$ , zu dem es eine in ganz  $G$  holomorphe Funktion gibt, die sich nicht analytisch in ein größeres Gebiet hinein fortsetzen lässt, auch nicht, wenn man nicht in  $\mathbb{C}^n$  enthaltene verallgemeinerte Gebiete zulässt, die aber immerhin noch zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeiten über  $\mathbb{C}^n$  sind. Als ein Werkzeug zur Bewältigung des Programms, die Lösung des Levi-Problems zu präsentieren, dient die Garben- und Kohomologietheorie.

Sollten wir uns den komplexen Mannigfaltigkeiten zuwenden, werden Divisoren und Geradenbündel (line bundles) behandelt und es wird der komplex-projektive Raum studiert. Des Weiteren steht die Modifikation von komplexen Mannigfaltigkeiten (blow-up) auf dem Programm und der Differenzialkalkül, der bei den Kählermannigfaltigkeiten eine erste Anwendung erfährt (theory of Hodge).

Literatur:

In erster Linie: Krantz und Kaup/Kaup

Weiterhin: Gunning/Rossi, Hörmander, Narasimhan, Osgood, Grauert/Fritzsche