Begleitskriptum zum Klausurenkurs Funktionentheorie

D. H. Jakubassa-Amundsen
Mathematisches Institut, LMU München

WS 11/12

1 Die Funktionen auf $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$

$\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ denn $\exists$ bijektive Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & x+iy \\ (\text{Re } z, \text{Im } z) & \leftarrow & z \end{array}$$

1.1 Differenzierbarkeit und Holomorphie

$g:\ \mathcal{D}(g) \longrightarrow \mathbb{R}^2:$ Differenzierbarkeit punktweise in $(a,b) \in \mathcal{D}(g) \subset \mathbb{R}^2$

$f:\ \mathcal{D}(f) \longrightarrow \mathbb{C}:$ Holomorphie nur auf offenen Mengen $D = \mathcal{D}(f) \subset \mathbb{C}$

Sei $\xi = (x,y)$. g differenzierbar in $\xi_0 = (a,b)$:

$$g(\xi) \;=\; g(\xi_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(\xi_0)\,(x-a) + \frac{\partial g}{\partial y}(\xi_0)\,(y-b) + R(\xi)\,|\xi - \xi_0|$$

mit $\lim\limits_{\xi \to \xi_0} R(\xi) = 0$.

Sei $z = x+iy$, $\bar{z} = x - iy$. f reell diffbar in $z_0 = a+ib$:

$$f(z,\bar{z}) \;=\; f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\,(z-z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\,(\bar{z}-\bar{z}_0) + R(z,\bar{z})\,|z-z_0|$$

mit $\lim\limits_{z \to z_0} R(z,\bar{z}) = 0$.

- f heißt komplex diffbar in $z_0 \in D$:

  $$f \text{ reell diffbar mit } \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \text{ in } z_0$$

  Sei $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$
- f komplex diffbar in $z_0 \in D$:

  f reell diffbar und Cauchy-Riemann DGL sind in z_0 erfüllt, d.h.

  $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

- f heißt holomorph in D, d.h. $f \in \mathcal{O}(D)$: f komplex diffbar $\forall\, z_0 \in D$.

1.2 Identitätssatz

Seien f, g in $D \subset \mathbb{C}$ holomorph. Sei $f = g$ auf einer Teilmenge von D mit Häufungspunkt in D.
Dann ist $f = g$ in D.
(Der Satz gilt auch für f, g in D meromorph.)

Merkregel: Finde Darstellung /verifiziere Formel auf einer Teilmenge von $\mathbb{C}$.
Falls f holomorph in $\mathbb{C}$ $\Longrightarrow$ Identitätssatz $\Longrightarrow$ Darstellung /Formel gilt auf $\mathbb{C}$.

Folgerung: Die Nullstellenmenge einer holomorphen Funktion $f \not\equiv 0$ ist diskret (und abgeschlossen).

1.3 Potenzreihen

Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \, (z - z_0)^n$ definiert innerhalb des Konvergenzkreises $|z - z_0| < R$ eine holomorphe Funktion f. (Die Reihe ist lokal gleichmäßig absolut konvergent $\forall\ z$ mit $|z - z_0| < R$.) R heißt Konvergenzradius.

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *lokal* glm. konv. in D: zu jedem $z \in D$ $\exists$ Umgebung $U(z) \subset D$: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert glm. in $U(z)$, d.h. $\exists\ N$: $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon\ \ \forall\ z \in U(z)\ \ \forall\ n > N$.

$$R \ = \ \liminf_{n \to \infty} \ |a_n|^{-1/n}$$

Falls $a_n \neq 0\ \ \forall\ n > N_0$:

$$R \ = \ \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad \text{falls dieser Limes existiert.}$$

Umgekehrt kann jede holomorphe Funktion lokal als Potenzreihe dargestellt werden:
Sei f holomorph in $D \subset \mathbb{C}$.
$\Longrightarrow$ für $z_0 \in D$ ist

$$f(z) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0) \ (z - z_0)^n \qquad \text{für alle } z \in U(z_0) \subset D$$

mit $R = \mathrm{dist}(z_0, \mathbb{C} \backslash D)$ (Taylorentwicklung). Es ist

$$a_n(z_0) \ = \ \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \qquad \text{d.h.} \quad f(z) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \ (z - z_0)^n.$$

Insbesondere: Die Folge der Partialsummen $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$S_n(z) \ = \ \sum_{k=0}^{n} a_k \ (z - z_0)^k \qquad (= \text{ Polynom in } z)$$

ist für $|z - z_0| < R$ glm. konvergent,
d.h. $f(z)$ ist gleichmäßig durch Polynome approximierbar:

$$|f(z) - S_n(z)| \ < \epsilon \qquad \text{für } n > N \ \text{ und } z \in B_0,$$

$B_0 \ = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < R\}$.

Eine Potenzreihe ist innerhalb des Konvergenzkreises beliebig oft komplex diffbar $\Longrightarrow$ jede holomorphe Funktion ist beliebig oft komplex diffbar (dies gilt nicht im $\mathbb{R}^2$!)

2 Komplexe Integration

$$\int_\gamma f(z)\, dz$$

2.1 Wege in $\mathbb{C}$

Weg γ ist eine stetige Abbildung von $[a,b] \subset \mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$, d.h. $\exists$ Parametrisierung
$\gamma(t):\ t \in [a,b]$.

Sei γ stetig diffbar auf $[a,b]$ (bzw. geeignete Zerlegung des Weges falls γ stückweise stetig diffbar, d.h. glatt). Dann

$$\int_\gamma f(z)\, dz \ = \ \int_a^b f(\gamma(t))\, \frac{d\gamma(t)}{dt}\, dt \qquad\qquad \text{(Substitutionsregel!)}$$

Länge des Wegs: $L(\gamma) \ = \ \int_\gamma |dz| \ = \ \int_a^b \left|\frac{d\gamma}{dt}\right| dt \qquad (a < b)$

Für alle $f \in \mathcal{O}(D)$ mit $F' = f$ in D und alle *glatten* (d.h. stetig differenzierbaren) Wege $\gamma : [a,b] \to D$ gilt

$$\int_\gamma f(z)\, dz \ = \ F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

(Wegunabhängigkeit des Integrals).

2.2 Mehrdeutige Funktionen: Logarithmus und Wurzel

Definition: $l(z)$ heißt Logarithmusfunktion, wenn $e^{l(z)} = z$.

$l(z) \ = \ \ln(z) \ + \ 2\pi i m, \quad m \in \mathbb{Z}$
$\ln(z)$ mit $-\pi < \mathrm{Im}\ \ln(z) \leq \pi$ $(=: \mathrm{Log}\ z)$ heißt Hauptzweig (oder Hauptwert) des Logarithmus.

Konstruktion einer eindeutigen Funktion:
Es wird eine Familie von Bildebenen eingeführt (eine sog. Riemannsche Fläche), worauf die Funktion eindeutig ist.

Zu ihrer Konstruktion bestimmt man die Pole/Verzweigungspunkte der Funktion und verbindet sie (d.h. man legt Verzweigungsschnitte).

Logarithmus hat Pole bei $z = 0$ und $z = \infty \implies$ Verzweigungsschnitt = negative reelle Achse $\mathbb{R}_-$ mit Nullpunkt.

Da $l(z)$ unendlich vieldeutig ist, besteht die Familie von Bildebenen aus unendlich vielen Kopien der Grundebene $\mathbb{C}$.

Bildliche Darstellung als sog. Überlagerung:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Riemannsche Fläche} & \qquad & l(z) & & \\ \downarrow & & \downarrow & \ \text{exp} & \qquad \text{(Projektion)} \\ \text{Grundebene} & & z & & \end{array}$$

Aufschneiden der 1.Ebene längs $\mathbb{R}_-$
Verkleben mit der 2.Ebene längs $\mathbb{R}_-$ (oberes Ufer der 1. Ebene mit unterem Ufer der 2.Ebene), so daß man bei einem Umlauf um 0 automatisch auf die 2.Ebene kommt (dort ist $l(z) = \ln(z) \ + \ 2\pi i$).
Fahre mit Verkleben so fort, bis je zwei aufeinanderfolgende Ebenen miteinander längs $\mathbb{R}_-$ verklebt sind.
Auf der m-ten Ebene ist $l(z) = \ln(z) \ + \ 2\pi i(m-1)$ *eindeutig*.

Zur Quadratwurzel $g^2(z) = z$:

Diese Funktion hat einen Verzweigungspunkt (keinen Pol) in $z = 0$, und einen zweiten in $z = \infty$ (der auch Pol ist). Der Verzweigungsschnitt ist wiederum $\mathbb{R}_- \cup \{0\}$.

g^2 hat zwei Zweige: $g^2(z) \ = \ z \ = \ ze^{2\pi i}$, damit $g_1(z) = \sqrt{z}, \quad g_2(z) = \sqrt{z}\, e^{\pi i} \ = \ -\sqrt{z}$.

Das heißt, die Familie der Bildebenen besteht aus 2 Kopien der Grundebene (die Riemannsche Fläche ist "zweiblättrig").

Bildliche Darstellung:

$$\begin{array}{ccc} \text{Riemannsche Fläche} & \pm\sqrt{z} & \\ \downarrow & \downarrow & g^2 \\ \text{Grundebene} & z & \end{array}$$

Eine in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ holomorphe Funktion f, die in 0 einen Verzweigungspunkt besitzt, kann in 0 *nicht* in eine Potenzreihe (Taylorreihe) oder Laurentreihe entwickelt werden.

An deren Stelle tritt die **Puiseux-Reihe**:

$$f(z) \ = \ \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\ (\theta^j\, z^{1/m})^k, \quad j = 1, ..., m$$

$\theta = e^{2\pi i/m}$ primitive Einheitswurzel, m = Verzweigungsindex (= Zahl der Bildebenen) = 2 für die Quadratwurzel.

2.3 Umlaufzahl

Sei $\gamma_t = \gamma|[a, t], \quad a \leq t \leq b$ ein Weg. Definiere

$$l(t) := \ l_0 \ + \int_{\gamma_t} \frac{dz}{z} \ = \ l_0 \ + \ \ln z|_{\gamma(a)}^{\gamma(t)}$$

Für $l_0 = \ln\gamma(a)$ ist $l(t) = \ln\gamma(t)$ eine Logarithmusfunktion von $\gamma(t)$.

In Polarkoordinaten $\gamma(t) = r(t)\, e^{i\varphi(t)} \implies l(t) = \ln\gamma(t) = \ln r(t) \ + \ i\varphi(t)$
$\implies \ \mathrm{Im}\, l(t) = \ \varphi(t)$ heißt Argument von $\gamma(t)$.

Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ die mehrfach durchlaufene Kreislinie um den Ursprung, so wird jedem $\gamma(t)$ eindeutig ein Integral $l(t)$ zugeordnet.

Umlaufzahl $\ \nu(\gamma) := \dfrac{1}{2\pi} \ \mathrm{Im} \displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z} \ \in \ \mathbb{Z}$ falls γ geschlossener Weg.

Verallgemeinerung der Umlaufzahl für $a_0 \in \mathbb{C}$:

$$\nu(\gamma; a_0) \ = \ \frac{1}{2\pi} \ \mathrm{Im} \int_\gamma \frac{dz}{z - a_0} \ = \ \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - a_0} \quad \text{(wird auch Indexfunktion genannt)}$$

Im Beispiel des Logarithmus ist $a_0 = 0$ der Ursprung.

Ein geschlossener Weg γ heißt in $G \subset \mathbb{C}$ nullhomolog, falls

$$\nu(\gamma; a_0) \ = \ 0 \qquad \forall\ a_0 \in \mathbb{C}\backslash G.$$

Ist in G jeder geschlossene Weg nullhomolog, so heißt G azyklisch (= homologisch einfach zusammenhängend).
Beispiel: konvexes Gebiet, sternförmiges Gebiet (darf keine Löcher haben).

2.4 Cauchyscher Integralsatz

Sei f holomorph in D und sei γ nullhomolog in D. Dann ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz \;=\; 0.$$

Ist D azyklisch (z.B. sternförmig), so ist $\int_\gamma f(z)\,dz \;=\; 0$ für alle geschlossenen Wege γ in D.

2.5 Residuensatz

Sei a (nicht wesentliche) isolierte Singularität einer holomorphen Funktion f (d.h. $a \notin \mathcal{D}(f)$).

Residuum $\operatorname{Res}(f;a) \;=\; \frac{1}{n!}\lim_{z\to a}\frac{d^n}{dz^n}\left((z-a)^{n+1}f(z)\right), \qquad n = 0, 1, ...$ falls dieser Limes existiert.

Hat f bei a die Form $\frac{1}{(z-a)^k}$, so ist $n = k-1$.

Für Pol erster Ordnung: $\operatorname{Res}(f;a) \;=\; \lim_{z\to a}(z-a)\,f(z) \qquad (n = 0)$.

Sei a (beliebige) isolierte Singularität von $f \implies \operatorname{Res}(f;a) = a_{-1} \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz$ (γ = geschlossener Weg in punktierter Umgebung von a, a_{-1} = Koeffizient von $1/(z-a)$ der Laurentreihe um a).

Residuensatz:
Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, sei f in G holomorph bis auf isolierte Singularitäten. Sei γ nullhomolog in G und $|\gamma|$ enthalte keine Singularitäten von f. Dann gilt:

$$\int_\gamma f(z)\,dz \;=\; 2\pi i \sum_{z_0\in G\setminus|\gamma|}\operatorname{Res}(f;z_0)\,\nu(\gamma;z_0).$$

Residuensatz für nichtgeschlossene Kreiswege:

Sei $\gamma(t) = z_0 + r\,e^{it},\ t \in [\alpha,\beta]$. f sei in $D := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-z_0| < r+\epsilon\}$ holomorph, $\epsilon > 0$. Sei z_0 Pol 1. Ordnung von f. Dann ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz \;=\; i\,(\beta-\alpha)\operatorname{Res}(f;z_0)$$

(Für 1 geschlossenen Umlauf ist $\beta - \alpha = 2\pi$).
γ darf deformiert werden, solange dabei keine weiteren Singularitäten von f überstrichen werden.

2.6 Äquivalenzen für einfach zusammenhängende Gebiete $G \subset \mathbb{C}$ und die dort holomorphen Funktionen

Folgende Aussagen sind äquivalent für $G \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(G)$:

(1) G ist (homologisch) einfach zusammenhängend.

(2) Jeder geschlossene Weg γ in G ist *nullhomotop* in G
(d.h. es gibt eine Homotopie H, die γ stetig in den Nullweg γ_0 überführt
mit $\gamma_0(t) := z_0 \in |\gamma|\ \ \forall\, t \in [a,b]$).

(3) G ist *homöomorph* zur Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$
(d.h. $\exists$ Abbildung $\varphi : G \to \mathbb{E}$ mit φ bijektiv und $\varphi,\ \varphi^{-1}$ stetig).

(4) Es ist $G = \mathbb{C}$, oder G ist *konform äquivalent* zu $\mathbb{E}$
(d.h. $\exists$ Abbildung $\varphi : G \to \mathbb{E}$ mit φ bijektiv und $\varphi,\ \varphi^{-1}$ holomorph).

(5) Jedes $f \in \mathcal{O}(G)$ besitzt eine Stammfunktion in G.

(6) Für alle $f \in \mathcal{O}(G)$ und alle geschlossenen, stückweise glatten Wege γ in G gilt der Cauchysche Integralsatz

$$\int_\gamma f(z)\, dz \;=\; 0.$$

(7) Für alle $f \in \mathcal{O}(G)$ mit $f(z) \neq 0\ \ \forall\, z \in G$ existiert eine holomorphe Funktion $l : G \to \mathbb{C}$ mit $f = e^l\ = \exp \circ l$
(l heißt analytischer Zweig des Logarithmus von f).

(8) Für alle $f \in \mathcal{O}(G)$ mit $f(z) \neq 0\ \ \forall\, z \in G$ und für alle $m \in \mathbb{N}+1$ existiert eine holomorphe m-te Wurzel $g : G \to \mathbb{C}$ mit $f = g^m$.

3 Meromorphe Funktionen

$f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ heißt meromorph in $D \subset \mathbb{C}$ offen, wenn

(1) f lokal als Quotient zweier holomorpher Funktionen g, h darstellbar ist, d.h. zu $z_0 \in D\ \exists$ Umgebung $U(z_0),\ \exists\, g_{z_0}, h_{z_0} \in \mathcal{O}(U(z_0))$ ohne gemeinsame Nullstelle:

$$f|U(z_0) \;=\; \frac{g_{z_0}}{h_{z_0}} \qquad \forall\, z_0 \in D.$$

(2) die Polstellenmenge von f diskret und abgeschlossen ist (kann sich höchstens außerhalb D häufen).
($f^{-1}[\mathbb{C}]$ ist dicht in D, d.h. zu jedem $\epsilon > 0,\ z \in D\ \ \exists\, \xi \in U_\epsilon(z) :\ f(\xi) < \infty$)

Beachte: Polstellenmenge von f entspricht Nullstellenmenge von h; diese darf sich nicht häufen, sonst wäre $h \equiv 0$.

3.1 Laurentreihen

Jede meromorphe Funktion in D ist lokal durch eine Reihe mit endlichem Hauptteil darstellbar:

$$f(z) \;=\; \sum_{k=-N}^{\infty} a_k\ (z - z_0)^k \quad \text{in } U(z_0), \quad N < \infty,\ a_k \in \mathbb{C},\ z_0 \in D$$

Dabei darf $\dot{U}(z_0) := U(z_0) \backslash \{z_0\}$ keine weitere Polstelle von f enthalten.
Diese Laurentreihe ist eindeutig und konvergiert in $0 < |z - z_0|\ < R$ gleichmäßig gegen f.
Gleiche Formel für Konvergenzradius R wie für Potenzreihen, da nur endlich viele Summanden dazukommen.
(Reihe ist normal konvergent = lokal gleichmäßig konvergent innerhalb R).

$$a_n \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

wobei $\gamma \subset \dot{U}(z_0)$ mit $\nu(\gamma; z_0) = 1,\ \ f \in \mathcal{O}(\dot{U}(z_0))$.

Falls $-N \geq 0 :\ f$ hol. in $U(z_0)$.

Erinnerung und Vergleich:
Cauchysche Integralformeln für $f \in \mathcal{O}(G),\ \ z_0 \in G,\ \ \gamma$ in G und $\nu(\gamma; z_0) = 1$

$$f^n(z_0) \;=\; n!\, \mathrm{Res}\,(\frac{f}{(z - z_0)^{n+1}}; z_0) \;=\; \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Damit: a_n für $n < 0$ ist Erweiterung der Cauchyschen Integralformeln.

3.2 Darstellung einer meromorphen Funktion $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ durch eine Familie von lokalen Laurentreihen

Sei $S = \{p_k : k = 1, ..., n, ...\}$ die Polstellenmenge von f

Sei $z_0 \in D$.
Start mit Laurentreihe für f um z_0 (einem sog. Funktionselement oder Funktionskeim)

$\varphi_0 = \sum_{k=-N_0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$, φ_0 existiert auf einem Kreis K_0

$$K_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}, \quad R = \min\{\mathrm{dist}\,(z_0, p_k), \mathrm{dist}\,(z_0, \mathbb{C}\backslash D)\}$$

für $p_k \in S\backslash\{z_0\}$.

Analytische Fortsetzung von f:
Wähle Funktionselement $\varphi_1 = \sum_{k=-N_1}^{\infty} b_k (z - z_1)^k$
sodaß entweder $z_1 \in K_0$ oder $z_0 \in K_1 :=$ Konvergenzkreis für φ_1.
Setze dies Verfahren fort, bis jedes $z \in D$ im Konvergenzkreis eines Funktionselements ist
(bemerke: Polstellenmenge ist diskret und kann sich höchstens in ∞ häufen).

Erstreckt sich D ins Unendliche, so definiert man $g(w) := f(\frac{1}{w})$ und bestimmt $\varphi_\infty = \sum_{k=-\tilde{N}}^{\infty} c_k w^k$.

Die Gesamtheit $\{\bigcup_{j \in I} \varphi_j\}$, I Indexmenge, heißt analytisches Gebilde von f.

3.3 Nichtlokale Darstellung einer in einem Kreisring holomorphen Funktion

Sei f eine in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion mit Polstellen p_i, $i \in I$ und q_j, $j \in J$. Gegeben sei ein Kreisring $K := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$, $r > 0$, so daß $|p_i - z_0| \leq r$ und $|q_j - z_0| \geq R \quad \forall\, i \in I,\ j \in J$.
(o.B.d.A. $z_0 = 0$, sonst betrachte Koordinatenverschiebung $z - z_0$).

Sei f global darstellbar als rationale Funktion von Polynomen.
Dann funktioniert folgende Methode:

(a) Partialbruchzerlegung und Sortieren der Pole, d.h. für $n_i, m_j \in \mathbb{N}$:

$$f(z) = \sum_{i \in I} \frac{a_i z^{n_i - 1}}{(z - p_i)^{n_i}} + \sum_{j \in J} \frac{b_j z^{m_j - 1}}{(z - q_j)^{m_j}} =: f_- + f_+$$

(b) Entwicklung von f_+ in lokale Laurentreihe um $z_0 = 0$ und von f_- in lokale Laurentreihe um $z_0 = \infty$ (via Trafo $z = \frac{1}{w}$).

(c) Rücksubstitution von $w = \frac{1}{z}$ führt zu
$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$ mit *unendlichem* Hauptteil, da $r > 0$.
(Dies ist der Preis für eine globale Darstellung von f im Kreisring, was mit Funktionselementen nicht möglich wäre.)

3.4 Klassifikation der Singularitäten einer holomorphen Funktion $f : D \to \mathbb{C}$

Sei f in punktierter Umgebung $\dot{U}(a) \subset D$ holomorph (Existenz von $\dot{U}$ folgt, weil alle Singularitäten isoliert sind).

1) $a \in D$ hebbare Singularität $:\iff \exists$ holomorphe Fortsetzung von f in a
$\iff f$ in $\dot{U}(a)$ beschränkt
$\iff \lim\limits_{z\to a} (z-a)\, f(z) = 0$

2) $a \in D$ isolierte Polstelle $:\iff \lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$
Polstelle $a < \infty$ hat die Ordnung $N > 0$ (d.h. $\operatorname{ord}(f;a) = -N$), falls die Laurentreihe die Form hat

$$f(z) \;=\; \sum_{k=-N}^{\infty} a_k\,(z-a)^k \qquad \text{mit } a_{-N} \neq 0$$

Polstelle $a = \infty$ hat die Ordnung N, wenn $g(w) := f(\frac{1}{w})$ in 0 einen Pol der Ordnung N hat.

3) $a \notin D$ wesentliche Singularität $:\iff$ 1) und 2) trifft nicht zu
$\iff f[\dot{U}(a)]$ dicht in $\mathbb{C}$
$\iff$ Laurentreihe hat unendlichen Hauptteil: $f(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,(z-a)^k$
$\iff \forall\, c \in \mathbb{C}: \;\exists$ Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \dot{U}(a),\; z_n \to a: \;\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = c$

Beachte: Ist $f(z) = \sum\limits_{k=-N}^{\infty} a_k z^k$ kein Polynom (d.h. Reihe bricht nicht ab), so ist $g(w) = \sum\limits_{n=-\infty}^{N} a_{-n} w^n$, d.h. 0 ist wesentliche Singularität von g (f heißt dann transzendente Funktion).

Kleiner Satz von Picard:
Eine nicht konstante, in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion läßt höchstens 2 Werte aus $\overline{\mathbb{C}}$ aus.
Eine nicht konstante, in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion läßt höchstens 1 Wert aus $\mathbb{C}$ aus.

Großer Satz von Picard:
Sei a wesentliche isolierte Singularität von $f \in \mathcal{O}(D)$. Sei $\dot{U}(a) \subset D$ eine beliebige punktierte Umgebung von a. Dann nimmt f in $\dot{U}(a)$ alle Werte aus $\mathbb{C}$ bis auf höchstens einen an.

4 Anwendungen

4.1 Cauchysche Abschätzungen

Cauchy Ungleichungen:
Sei f holomorph in D, sei $K_r(a) = \{z \in \mathbb{C} : \; |z-a| \le r\} \subset D$ für ein $r \in (0,\infty)$. Dann ist

$$|f^{(n)}(a)| \;\le\; \frac{n!}{r^n} \sup_{|z-a|=r} |f|$$

(r ist so groß wie möglich zu wählen).

Abschätzung der Taylorkoeffizienten: $|a_n(z_0)| \;\le\; \dfrac{1}{r^n} \sup\limits_{|z-z_0|=r} |f|$

4.2 Maximumprinzip

Sei f in einer Umgebung $U(a)$ holomorph und $|f|$ habe in a ein lokales Maximum
$\Longrightarrow$ f ist in $U(a)$ konstant.

Folgerung: Sei f in $\overline{D} \subset \mathbb{C}$ stetig, in D holomorph, D beschränktes Gebiet.
Dann nimmt $|f|$ das Maximum auf dem Rand ∂D an.
Sei f nullstellenfrei in D. Dann nimmt $|f|$ das Minimum auf ∂D an.

Satz von Liouville:
Jede beschränkte ganze Funktion f (d.h. $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$) ist konstant.

4.3 Charakterisierung von Polynomen

Wachstumslemma:
Sei $p \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom n-ten Grades. Dann $\exists\, R > 0$:

$$\frac{1}{2}\,|a_n|\,|z|^n \;\leq\; |p(z)| \;\leq\; 2\,|a_n|\,|z|^n \qquad \forall\ |z|\ > R$$

(a_n ist der führende Koeffizient).

Umkehrung: Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Es gebe $a > 0,\ n \in \mathbb{N}$:

$$|f(z)| \;\leq\; a\,|z|^n \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Dann ist $f(z) = cz^n$ ein Polynom mit $|c| \leq a$.

Erweiterte Umkehrung: Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Es gebe $n \in \mathbb{N},\ c > 0,\ R > 0$: $\operatorname{Re}(f(z)) \;\leq\; c\,|z|^n$ für alle $|z| \geq R$
$\Longrightarrow$ f ist Polynom vom Grad $\leq n$.

4.4 Nullstellenformeln

Anzahlformel:
Sei f in $G \subset \mathbb{C}$ meromorph und sei γ ein nullhomologer Weg in G. Auf $|\gamma|$ sollen keine Null- und Polstellen liegen.
Sei $m(0) \;=\; \sum\limits_{\zeta \in f^{-1}(0) \cap D} \operatorname{ord}(f;\zeta)$ die Anzahl der Nullstellen (mit Vielfachheit) im von γ umrandeten Gebiet $D \subset G$, und sei $m(\infty)$ die Anzahl der Polstellen in D. Für jedes $z_0 \in D$ gelte $\nu(\gamma; z_0) = 1$. Dann gilt

$$m(0) \;=\; m(\infty) \;+\; \nu(f \circ \gamma; 0) \;=\; m(\infty) \;+\; \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz$$

Verallgemeinert: Sei $f(z) \neq c\ \ \forall z \in |\gamma|$. Dann ist die Vielfachheit der c-Stelle (vgl. z_1 ist c-Stelle von f, wenn z_1 Nullstelle von $f - c$):

$$m(c) \;=\; m(\infty) + \nu(f \circ \gamma; c) \;=\; m(\infty) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f-c}\,dz$$

Satz von Rouché:
Seien f, g holomorph in $G \subset \mathbb{C}$ und sei γ nullhomolog in G mit $\nu(\gamma; z) = 1$ für alle z im von γ umrandeten Gebiet $D \subset G$. Gilt

$$|f(\zeta) - g(\zeta)| \;<\; |g(\zeta)| \quad \text{auf } |\gamma|,$$

so haben f und g gleichviele Nullstellen (mit Vielfachheit) in D.
(Das Vorzeichen von g ist irrelevant, da auf der r.S. nur der Betrag steht.)

Fundamentalsatz der Algebra:
Sei $f \;=\; \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ ein Polynom, $f \neq \text{const}$. Dann hat f eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

5 Holomorphe und biholomorphe Abbildungen

Jede auf D holomorphe Funktion f ist eine holomorphe Abbildung $f : D \to f(D) =: W \subset \mathbb{C}$.

Gebietstreue:
f holomorph, nicht konstant, D Gebiet (= offen und zusammenhängend) $\implies$ $f(D)$ Gebiet.

$f : D \to W$ biholomorph $:\iff$ W offen, $\exists$ Umkehrabbildung $f^{-1} : W \to D$ mit f^{-1} holomorph in W.

Alle injektiven holomorphen Funktionen sind biholomorph und für sie gilt $f' \neq 0$ auf D.

Lokales Biholomorphiekriterium:
Eine holomorphe Abbildung $f : D \to \mathbb{C}$ ist genau dann lokal biholomorph um $z_0 \in D$, wenn $f'(z_0) \neq 0$ ist.

Eine Abbildung heißt konform, wenn sie lokal winkel- und orientierungstreu ist. Jede biholomorphe Abbildung ist konform.

5.1 Abbildungssätze

Riemannscher Abbildungssatz:
Sei $G \subsetneq \mathbb{C}$ ein azyklisches Gebiet. Dann $\exists$ biholomorphe Abbildung $f : G \to \mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
(f wird eindeutig festgelegt, wenn man für ein $z_0 \in G$ fordert: $f(z_0) = 0,\ f'(z_0) > 0$).

Beispiel: **Cayleyabbildung** für $G := \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ = obere Halbebene via $f_c :\ \mathbb{H} \to \mathbb{E}$ biholomorph,
$f_c(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ (gehört zur Klasse $\varphi : \mathbb{H} \to \mathbb{E},\ \varphi(z) = \dfrac{z-a}{z-\bar{a}},\quad \operatorname{Im} a > 0$).

Beweismethode: Bilde Rand ($\partial\mathbb{H}$) auf Rand ($\partial\mathbb{E}$) ab. Kontrolliere, ob $z_0 \in \mathbb{H} \mapsto w_0 \in \mathbb{E}$.
Merke: Jeder Kreis ist durch 3 Punkte bestimmt.

5.2 Automorphismen

Automorphismen einer Teilmenge $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ sind biholomorphe Abbildungen $\varphi : D \to D$. Sie bilden eine Gruppe, $\operatorname{Aut}(D)$.
Die wichtigsten Teilmengen von $\overline{\mathbb{C}}$ sind $\mathbb{E}$, $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{C}}$.
Diese 3 Teilmengen sind (bis auf konforme Äquivalenz) die einzigen einfach-zusammenhängenden (= azyklischen) Flächen. Sie sind 3 verschiedene Typen, die *nicht* durch konforme Abbildungen ineinander übergeführt werden können:
$\overline{\mathbb{C}}$ nicht in $\mathbb{C}$, $\mathbb{E}$, weil $\overline{\mathbb{C}}$ abgeschlossen, aber $\mathbb{C}$, $\mathbb{E}$ offen
$\mathbb{C}$ nicht in $\mathbb{E}$, denn $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit $\varphi(\mathbb{C}) = \mathbb{E}$ (d.h. beschränkt) ist konstant (Satz von Liouville), und konstante Abbildungen sind nicht injektiv.

Automorphismengruppe von $\mathbb{C}$: ganze lineare Trafos $\varphi(z) = a_0 + a_1 z,\ a_0 \in \mathbb{C},\ a_1 \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C}\backslash\{0\}$
Automorphismengruppe von $\overline{\mathbb{C}}$: Möbiustrafos = gebrochen lineare invertierbare Trafos $\varphi(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{C},\ \ ad - bc \neq 0$
Automorphismengruppe von $\mathbb{E}$: $\varphi(z) = \dfrac{z+\bar{c}}{cz+1} \cdot d,\quad |c| < 1,\ |d| = 1.$
Automorphismengruppe von $\mathbb{H}$: Möbiustrafos mit reellen Koeffizienten und $ad - bc = 1$.

Automorphismengruppe von G:
Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und azyklisch $\implies$ $\exists\, f : G \to \mathbb{E}$ (Riemannscher Abbildungssatz).
Sei $\varphi \in \operatorname{Aut}(\mathbb{E})$, d.h. $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$.
Dann ist $G \xrightarrow{f} \mathbb{E} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{E} \xrightarrow{f^{-1}} G$, d.h. $f^{-1} \circ \varphi \circ f \in \operatorname{Aut}(G)$ und $\operatorname{Aut}(G) = \{f^{-1} \circ \varphi \circ f : \varphi \in \operatorname{Aut}(\mathbb{E})\}$.

5.3 Eigenschaften der Abbildungen

Fixpunkte: z_0 Fixpunkt von $f \;:\Longleftrightarrow\; f(z_0) = z_0$.

Jeder Automorphismus $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ mit $\varphi \neq \mathrm{id}$ hat höchstens einen Fixpunkt (in $\mathbb{E}$).

Alle Automorphismen von $\overline{\mathbb{C}}$ bilden Kreise in Kreise ab (dabei ist die Gerade ein Spezialfall des Kreises).

6 Die Gruppe der Möbiustransformationen

6.1 Definition

Eine gebrochen lineare Transformation φ heißt Möbiustransformation, wenn für sie gilt

$$\varphi(z) \;=\; \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad-bc \neq 0, \quad a,b,c,d \in \mathbb{C}$$

Inverse Abbildung:

$$w \;=\; \frac{az+b}{cz+d} \;\Longleftrightarrow\; wcz + wd \;=\; az+b \;\Longleftrightarrow\; z \;=\; \frac{b-wd}{wc-a} \;=\; \varphi^{-1}(w)$$

Zusatzdefinitionen, damit gilt $\varphi, \varphi^{-1} : \; \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$

$$\varphi(\infty) \;=\; \frac{a}{c}, \quad \varphi^{-1}(\infty) \;=\; -\frac{d}{c}$$

Die Zusatzbedingung $ad-bc \neq 0$ garantiert dabei die Wohldefiniertheit der rechten Seiten (a, c sowie d, c nicht gleichzeitig 0).

6.2 Matrizenschreibweise

Jeder Möbiustrafo $\varphi \;=\; \dfrac{az+b}{cz+d}$ wird die Matrix $M_\varphi \;=\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ zugeordnet.
Wegen der Zusatzbedingung ist $\det M_\varphi = ad-bc \neq 0$, d.h. M_φ ist invertierbar.
M_φ ist nicht eindeutig, denn $\lambda\, M_\varphi$ liefert auch φ (für alle $\lambda \in \mathbb{C}^* \;= \mathbb{C}\backslash\{0\}$).

Wichtige Gruppeneigenschaft: $\varphi \circ \tilde{\varphi} \;\hat{=}\; M_\varphi \cdot M_{\tilde{\varphi}}$

d.h. zu $\psi \;=\; \dfrac{a\tilde{\varphi}(z)+b}{c\tilde{\varphi}(z)+d}$ mit $\tilde{\varphi}(z) \;=\; \dfrac{\tilde{a}z+\tilde{b}}{\tilde{c}z+\tilde{d}}$ gehört die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} a\tilde{a}+b\tilde{c} & a\tilde{b}+b\tilde{d} \\ c\tilde{a}+d\tilde{c} & c\tilde{b}+d\tilde{d} \end{pmatrix}$$

Außerdem: Assoziativität; Existenz der Eins: $\varphi = \mathrm{id} \;\hat{=}\; M_\varphi \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a=1,\ d=1,\ b=c=0.$

Existenz des Inversen: $\quad (M_\varphi)^{-1} \;=\; \dfrac{-1}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ (Vorfaktor stört nicht).

Vorteil der Matrizenschreibweise:
Jede Matrix $\in \mathbb{C}^{2,2}$ kann als Linearkombination von Basiselementen geschrieben werden (mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$).
Übliche Basis:

$$E \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Pauli Spin-Matrizen zur Darstellung des Spin $\frac{1}{2}$).

Zugehörige Trafos: $\varphi_0(z) = z$ (Identität), $\varphi_1(z) = \dfrac{1}{z}$ (Invertierung), $\varphi_2(z) = -\dfrac{1}{z}$ (Spiegelung am Einheitskreis), $\varphi_3(z) = -z$ (Drehung um Ursprung).

Warnung: Einer Linearkombination der Matrizen entspricht *nicht* eine Linearkombination der Trafos!

6.3 Eigenschaften

- Eine Möbiustrafo ist durch die Zuordnung von 3 Punkten $z_i \mapsto w_i$, $i = 1, 2, 3$, eindeutig bestimmt (vgl. sie bildet Kreise auf Kreise ab und jeder Kreis ist durch 3 Punkte bestimmt).

- Eine Möbiustrafo hat höchstens 2 Fixpunkte in $\overline{\mathbb{R}}$.

Sei $ad - bc = 1$ (ist durch Normierung erreichbar).
$z = \dfrac{az+b}{cz+d}$ hat 2 reelle Lösungen, falls $s :=$ (Spur $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})^2 = (a+d)^2 > 4$ (Trafo heißt hyperbolisch)
1 reelle Lösung, falls $s = 4$ (Trafo parabolisch)
0 reelle Lösungen, falls $s < 4$ (Trafo elliptisch, sie hat 2 konjugiert komplexe Fixpunkte)
Trafo heißt loxodromisch, falls $a + d \notin \mathbb{R}$.

- Isometrischer Kreis einer Möbiustrafo φ mit $|ad - bc| = 1$ und $c \neq 0$: $\mathcal{I}_\varphi = \{z \in \mathbb{C} : \ |cz + d| = 1\}$
  d.h. $|c|\,|z + d/c| = 1$; Mittelpunkt $= -d/c$, Radius $= 1/|c|$.

  Es ist $\varphi(\mathcal{I}_\varphi) = \mathcal{I}_{\varphi^{-1}}$ und das Innere von $\mathcal{I}_\varphi$ wird auf das Äußere von $\mathcal{I}_{\varphi^{-1}}$ abgebildet.

7 Konstruktion meromorpher Funktionen

Gegeben: diskrete, abgeschlossene Menge A in $\mathbb{C}$ (= Nullstellenmenge der gesuchten Funktion f)
und Familie $(d_a)_{a \in A} \subset \mathbb{N}$ ($d_a = \operatorname{ord}(f; a)$ Ordnung d.h. Vielfachheit der Nullstelle)

7.1 Weierstraßscher Produktsatz für holomorphe Funktionen

(1) Existenz: $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit obigen Eigenschaften ist eindeutig bis auf Faktor $e^{h(z)}$ mit $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

(2) Konstruktionsformel:

Falls A endlich, d.h. $A \backslash \{0\} = \{a_n : n = 1, ..., N\}$ und $d = \operatorname{ord}(f; 0)$:

$$f(z) \ = \ e^{h(z)}\ z^d \prod_{n=1}^{N} (z - a_n)^{d_n}$$

Falls A abzählbar unendlich, d.h. man hat Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \to \infty$ (beachte: Häufungspunkt darf nicht in $\mathbb{C}$ liegen),
so braucht man Konvergenzfaktoren:

$$f(z) \ = \ e^{h(z)}\ z^d \prod_{n=1}^{\infty} F_{m(n)}(\frac{z}{a_n}) \quad \text{mit } F_{m(n)}(\xi) \ = \ (1-\xi)\ e^{\xi + \frac{1}{2}\xi^2 + \ldots + \frac{1}{m}\xi^m}$$

(dabei soll die Reihe im Exponenten eine Minimalzahl von Termen haben, die die gleichmäßig absolute Konvergenz des unendlichen Produkts sichert).
$F_{m(n)}$ hat einfache Nullstelle, d.h. ist $\operatorname{ord}(f; \tilde{a}) = k \implies \tilde{a}$ tritt k mal in der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf. (Mit n Termen der Reihe im Exponenten ist die Konvergenz gesichert, aber das ist für praktische Zwecke nutzlos.)
Häufig reicht es aus, $F_{m(n)}(\xi) = (1 - \xi)\, e^{\xi}$ zu verwenden, d.h. $m = 1$.

Konvergenzkriterium:
$\prod_{n=1}^{\infty} F_n$ konvergiert glm. abs. $\iff \sum_{n=n_1}^{\infty} |\ln F_n|$ konvergiert glm. für ein $n_1 \in \mathbb{N}$
dabei ist ln der Hauptwert des Logarithmus
(vgl. $F_1 \cdot F_2 = e^{\ln F_1 \cdot F_2} \; = \; e^{\ln F_1 + \ln F_2}$)
Äquivalentes Konvergenzkriterium:
Schreibt man $F_n = 1 + f_n$, dann: $\sum_{n=n_1}^{\infty} |f_n|$ muß glm. konvergent sein.

7.2 Anwendung auf meromorphe Funktionen

Gegeben: diskrete, abgeschlossene Menge A in $\mathbb{C}$ (Null- und Polstellenmenge von f)
und eine Familie $(d_a)_{a \in A} \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ (so daß $d_a = \operatorname{ord}(f; a)$).

(1) Existenz: $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ eindeutig bis auf Faktor $e^{h(z)}$ mit $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

(2) Konstruktionsformel:

Zerlegung von A in $A_1 = \{a \in A : d_a < 0\}$ und $A_2 = \{a \in A : d_a > 0\} \; = A \backslash A_1$

Weierstraßscher Produktsatz : Finde g zu A_2 mit Familie $(d_a)_{a \in A_2}$
h zu A_1 mit Familie $(-d_a)_{a \in A_1}$
dann ist $f = \dfrac{g}{h}$.

7.3 Satz von Mittag-Leffler

Gegeben: diskrete Menge $A \subset \mathbb{C}$ (Menge der Polstellen von f).
Jedem $a \in A$ sei eine rationale Funktion

$$\varphi_a \; = \; \sum_{n=1}^{n_a} \frac{c_{a,n}}{(z-a)^n}, \qquad c_{a,n} \in \mathbb{C}, \quad n_a \in \mathbb{N}$$

zugeordnet (= Hauptteil von f in a).
Dann gibt es eine meromorphe Funktion f (die in $\mathbb{C} \backslash A$ holomorph ist), mit genau diesen Polen und Hauptteilen,

$f \; = \; \sum_{a \in A} (\varphi_a - \psi_a), \qquad \psi_a$ konvergenzerzeugende Funktion
($\psi_a =$ Anfang der Taylorreihe von φ_a in $z = 0$, d.h. ist ein Polynom in z).

Zu f kann noch eine beliebige Funktion $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ addiert werden, so daß $f + g$ ebenfalls $\in \mathcal{O}(\mathbb{C} \backslash A)$ mit den vorgegebenen Hauptteilen.

8 Elliptische Funktionen

Elliptische Funktionen sind doppeltperiodische Funktionen $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$
d.h. $\exists \, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*$, $\omega_1 \neq \lambda \, \omega_2$ mit $\lambda \in \mathbb{R}^*$:

$$f(z) \; = \; f(z + \omega_1) \; = \; f(z + \omega_2) \qquad \forall \, z \in \mathbb{C}$$

o.B.d.A. seien ω_1 und ω_2 die betragsmäßig kleinsten Perioden
(mit ω_1 ist auch $m\omega_1$, $m \in \mathbb{Z}$, Periode:
$f(z + m\omega_1) \; = \; f(z + \, (m-1)\omega_1) \; = \; ... = \; f(z).$)

Anschaulich: Die Perioden bilden ein Gitter (= Periodengitter $\Gamma \subset \mathbb{C}$) aufgespannt durch die Vektoren $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$,

$\Gamma \;=\; m\,\omega_1 \,+\, n\,\omega_2, \qquad m, n \in \mathbb{Z}$
Auf allen Gitterpunkten hat f denselben Wert.

f heißt elliptische Funktion zu Γ, wenn f in allen Punkten von Γ denselben Wert hat.
Trivialfall: $f = \text{const}$

Eigenschaften von f:

- Im Parallelogramm $P := \;\omega_1\,[0,1) \;+\; \omega_2\,[0,1)$ nimmt f all seine möglichen Werte an,
  d.h. $f[P] \;=\; f[\mathbb{C}]$; dabei darf man P auch um ein beliebiges $a \in \mathbb{C}$ verschieben:
  Ist $P' = P + a \implies f[P'] \;=\; f[\mathbb{C}]$.
- Ist f holomorph, so ist f konstant.
- Darstellung durch Reihen (via Mittag-Leffler)

  Beispiel: Weierstraßsche $\mathfrak{p}$-Funktion (hat genau die durch Γ vorgegebenen Pole)

$$\mathfrak{p}(z) \;=\; \frac{1}{z^2} \;+\; \sum_{\omega\in\Gamma\setminus\{0\}} \left[\frac{1}{(\omega - z)^2} \;-\; \frac{1}{\omega^2}\right], \qquad \omega = m\omega_1 + n\omega_2, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

  Der Summand $1/\omega^2$ ist eine konvergenzerzeugende Funktion $\left(= \frac{1}{(\omega - z)^2}\big|_{z=0}\right)$.

- $\mathbb{C} \;\subset\; \mathbb{C}(\mathfrak{p})$ ist eine transzendente Körpererweiterung von $\mathbb{C}$

  dabei ist $\mathbb{C}$ der Raum der konstanten Funktionen,
  und $g \in \mathbb{C}(\mathfrak{p})$ ist eine rationale Funktion von $\mathfrak{p}$, d.h.

$$g \;=\; \frac{\sum_{j=0}^{n} a_j \mathfrak{p}^j}{\sum_{k=0}^{m} b_k \mathfrak{p}^k}, \qquad m, n \in \mathbb{N}_0, \quad a_j, b_k \in \mathbb{C} \quad (j = 0, ..., n,\; k = 0, ..., m).$$