Probestudium 2018
- Hausaufgabenblatt -

Prof. Dr. Werner Bley
Dominik Bullach
Martin Hofer
Pascal Stucky

Aufgabe 1
Folgender Limerick ist im San Francisco Examiner in den 1970er Jahren erschienen:

> There was a young lady named Chris
> Who, when asked her age, answered this.
> Two-thirds of its square
> Is a cube, I declare.
> Now what was the age of the miss?

Wie alt ist nun Chris? Achten Sie darauf, jeden Ihrer Schritte genau zu begründen.

Aufgabe 2
Sei K ein Körper mit Einselement 1_K, der aus endlich vielen Elementen besteht. Zeigen Sie: Es gibt eine minimale natürliche Zahl n, sodass

$$n \cdot 1_K = \underbrace{1_K + \cdots + 1_K}_{n\text{-mal}} = 0_K,$$

und dieses n ist eine Primzahl.

Abgabe Sie können ihre Ideen, Erläuterungen und Beweise zu diesen Aufgaben aufschreiben und bis Donnerstag vor der Vorlesung in den entsprechenden Briefkasten im 1. Stock einwerfen. Für die beste Bearbeitung verleihen wir dann am Freitag am Ende der Vorlesung einen kleinen Preis.

Sie dürfen in Gruppen zusammenarbeiten, sollen aber trotzdem eigenständige Lösungen einreichen.

Lösungen

Aufgabe 1

Sei A das Alter von Chris und sei

$$A = 2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot 5^{a_5} \cdot 7^{a_7} \cdot \ldots$$

die Primfaktorenzerlegung von A. Dann können wir zwei Drittel des Quadrates von A schreiben als

$$\frac{2}{3}A^2 = \frac{2}{3} \cdot 2^{2a_2} \cdot 3^{2a_3} \cdot 5^{2a_5} \cdot 7^{2a_7} \cdot \ldots = 2^{2a_2+1} \cdot 3^{2a_3-1} \cdot 5^{2a_5} \cdot 7^{2a_7} \cdot \ldots$$

Lemma. *Sei $k \geq 2$ eine ganze Zahl und $m \in \mathbb{N}$. Dann ist m eine k-te Potenz genau dann, wenn alle Exponenten in der Primfaktorenzerlegung von m Vielfache von k sind.*

Beweis: Sei

$$m = 2^{m_2} \cdot 3^{m_3} \cdot 5^{m_5} \cdot \ldots$$

Falls jeder Exponent m_p ein Vielfaches von k ist, dann finden wir l_p sodass wir schreiben können $m_p = kl_p$ für jede Primzahl p, also folgt

$$m = (2^{l_2} \cdot 3^{l_3} \cdot 5^{l_5} \cdot \ldots)^k,$$

was natürlich eine k-te Potenz ist.

Umgekehrt nehmen wir an, dass $m = n^k$ gilt. Sei

$$n = 2^{n_2} \cdot 3^{n_3} \cdot 5^{n_5} \cdot \ldots$$

die Primfaktorenzerlegung von n. Dann gilt

$$m = n^k = 2^{kn_2} \cdot 3^{kn_3} \cdot 5^{kn_5} \cdot \ldots.$$

Dies ist aber nun die Primfaktorenzerlegung von m, und jeder Exponent ist ein Vielfaches von k, was zu zeigen war. $\square$

Kommen wir nun zurück zum Limerick. Es soll $\frac{2}{3}A^2$ eine Kubikzahl sein, mit dem Lemma folgt daher, dass dies genau dann der Fall ist, wenn

$$2a_2 + 1, 2a_3 - 1, 2a_5, 2a_7, \ldots$$

Vielfache von 3 sind.

Da $3 \mid 2a_5$ gelten soll, gibt es ein a_5' mit $a_5 = 3a_5'$, gleiches gilt für alle a_p mit $p > 5$. Da $2a_2 + 1$ ungerade und ein Vielfaches von 3 ist, können wir schreiben $2a_2 + 1 = 3(2j + 1)$, was impliziert $a_2 = 3j + 1$ für ein j. Für a_3, gilt $2a_3 - 1 = 3(2k + 1)$, also $a_3 = 3k + 2$ für ein k. Wir bekommen also insgesamt

$$A = 2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot 5^{a_5} \cdot 7^{a_7} \cdot \ldots = 2 \cdot 3^2 \cdot (2^j \cdot 3^k \cdot 5^{a_5'} \cdot 7^{a_7'} \cdot \ldots)^3$$

also $A = 18B^3$ für beliebige $B \in \mathbb{N}$. Umgekehrt überprüft man unmittelbar, dass jede Zahl dieser Form eine mögliche Lösung ist. Das kleinstmögliche Alter ist daher 18 und, da die nächstgrößere Lösung ($B = 2$) mit 144 als Alter bereits zu hoch für eine *young* lady ist, schließen wir $A = 18$.

Aufgabe 2

Laut der Definition eines Körpers sind die Elemente 1_K, $2 \cdot 1_K$, $3 \cdot 1_K$ usw. jeweils wieder in K enthalten, d. h.

$$\{a \cdot 1_K \mid a \in \mathbb{N}\} \subseteq K.$$

Da es sich bei K um eine endliche Menge handelt, können die Elemente in der Menge rechts nicht alle verschieden sein. Es gibt also natürliche Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a > b$ und

$$a \cdot 1_K = b \cdot 1_K.$$

Umstellen der Gleichung beschert uns

$$(a-b) \cdot 1_K = 0_K.$$

Es gibt folglich zumindest eine natürliche Zahl n mit der gewünschten Eigenschaft, dass $n \cdot 1_K = 0$. (Beachte hierbei auch, dass oben $b - a > 0$, also eine natürliche Zahl ist). Weil es außerdem nur endlich viele natürliche Zahlen gibt, die kleiner gleich $b - a$ sind, können wir n außerdem als minimal voraussetzen.[1]

Angenommen, n wäre keine Primzahl. Dann könnten wir $n = l \cdot m$ mit natürlichen Zahlen $l, m < n$ schreiben. Bemerke nun, dass

$$(l \cdot 1_K) \cdot (m \cdot 1_K) = (\underbrace{1_K + \cdots + 1_K}_{l\text{-mal}}) \cdot (\underbrace{1_K + \cdots + 1_K}_{m\text{-mal}}) = \underbrace{1_K + \cdots + 1_K}_{lm\text{-mal}} = (lm) \cdot 1_K = n \cdot 1_K.$$

Wir haben daher

$$0 = n \cdot 1_K = (l \cdot 1_K) \cdot (m \cdot 1_K). \tag{$*$}$$

In einem Körper K gilt nun allgemein[2]:

$$x \cdot y = 0_K \text{ für } x, y \in K \quad \Rightarrow \quad x = 0_K \text{ oder } y = 0_K, \tag{$**$}$$

denn: Falls $x = 0_K$ gilt, ist nichts zu zeigen. Falls dagegen $x \neq 0_K$, so existiert das Inverse $x^{-1} \in K$ und Multiplizieren der Gleichung oben mit x^{-1} ergibt

$$x^{-1} \cdot x \cdot y = x^{-1} \cdot O_K \quad \Leftrightarrow \quad 1_K \cdot y = 0_K \quad \Leftrightarrow \quad y = 0_K.$$

Dies zeigt die Behauptung $(**)$.

Wenden wir nun nun Behauptung $(**)$ auf Gleichung $(*)$ an, so erhalten wir

$$l \cdot 1_K = 0_K \quad \text{oder} \quad m \cdot 1_K = 0_K.$$

Wegen $l, m < n$ also in beiden Fällen einen Widerspruch zur Minimalität von n. Also muss die Annahme falsch gewesen sein, d. h. n ist eine Primzahl.

[1]Damit ist folgendes gemeint: Falls $a - b$ nicht die kleinste natürliche Zahl mit der gewünschten Eigenschaft ist, können wir eben eine kleinere wählen und landen nach endlich vielen Schritten bei der minimalen solchen Zahl. Diese nennen wir dann n. Würden wir nicht in den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, sondern in $\mathbb{Z}$ arbeiten, würde das jedoch nicht funktionieren. Dort könnten wir nämlich immer eine noch kleinere Zahl wählen, kämen also nie ans Ziel.

[2]Mathematiker sprechen davon, dass Körper sogenannte *Integritätsbereiche* sind.