Probestudium 2018
- Übungsblatt 2 -

Prof. Dr. Werner Bley
Dominik Bullach
Martin Hofer
Pascal Stucky

Aufgabe 1 (einfach)
Berechnen Sie das Polynom P_α und überprüfen Sie daran, ob α eine ganze algebraische Zahl ist.

(a) $\alpha = 7$,

(b) $\alpha = 2 + 5i$,

(c) $\alpha = \frac{5+i\sqrt{13}}{2}$.

Aufgabe 2 (einfach)
Sei K ein quadratischer Zahlkörper und seien $x, y \in K$ sowie $n \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

(a) $\sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y)$ sowie $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$,

(b) $N(xy) = N(x)N(y)$,

(c) $\mathrm{Tr}(x+y) = \mathrm{Tr}(x) + \mathrm{Tr}(y)$,

(d) $\mathrm{Tr}(nx) = n\,\mathrm{Tr}(x)$.

Aufgabe 3 (einfach)
Sei K ein Zahlkörper und $\alpha \in K$. Weisen Sie nach, dass α Nullstelle von P_α ist.

Aufgabe 4 (mittel)
Sei K ein quadratischer Zahlkörper mit Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{O}_K \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$,

(b) $\sigma(\mathcal{O}_K) = \mathcal{O}_K$.

Aufgabe 5 (mittel)
Sei K ein quadratischer Zahlkörper und $\alpha \in K^\times$ mit $N(\alpha) = 1$. Zeigen Sie, dass es ein $\beta \in K^\times$ gibt, sodass $\alpha = \frac{\sigma(\beta)}{\beta}$.

Hinweis: Finden Sie ein $\gamma \in K^\times$, sodass $\beta := \sigma(\gamma) + \sigma(\alpha)\gamma \neq 0$ und betrachte dann $\alpha\beta$.

Lösungsskizzen

Aufgabe 1

Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Wir berechnen das Polynom $P_\alpha(x)$, welches definiert ist als $x^2 - \mathrm{Tr}(\alpha)x + N(\alpha)$. Zudem wissen wir, dass für $\alpha = a + b\sqrt{m} \in K$ gilt $\mathrm{Tr}(\alpha) = 2a$ und $N(\alpha) = a^2 - mb^2$. Also berechnen wir

(a) $P_7(x) = x^2 - 14x + 49$,

(b) $P_{2+5i}(x) = x^2 - 4x + 29$,

(c) $P_{\frac{5+\sqrt{-13}}{2}}(x) = x^2 - 5x + \frac{19}{2}$.

Somit sind die α in (a) und (b) ganze algebraische Zahlen, da hier $P_\alpha(x) \in \mathbb{Z}[x]$ gilt.

Aufgabe 2

Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ und $x = a + b\sqrt{m}$ sowie $y = c + d\sqrt{m}$. In allen Teilaufgaben nutzen wir die Eigenschaften des Körpers K ohne sie separat zu zitieren, wie Kommutativität, Assoziativität etc.

(a) Da wir wissen, dass gilt $\sigma(x) = a - b\sqrt{m}$ für alle $x \in K$ können wir berechnen:

$$\begin{aligned}\sigma(x+y) &= \sigma(a + b\sqrt{m} + c + d\sqrt{m}) = \sigma(a + c + (b+d)\sqrt{m}) \\ &= a + c - (b+d)\sqrt{m} = a - b\sqrt{m} + c - d\sqrt{m} = \sigma(x) + \sigma(y)\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\sigma(xy) &= \sigma((a + b\sqrt{m}) \cdot (c + d\sqrt{m})) = \sigma(ac + bdm + (ad+bc)\sqrt{m}) \\ &= ac + bdm - (ad+bc)\sqrt{m} = (a - b\sqrt{m}) \cdot (c - d\sqrt{m}) = \sigma(x)\sigma(y).\end{aligned}$$

(b) Mit Teilaufgabe (a) erhalten wir sofort:

$$N(xy) = xy\sigma(xy) = xy\sigma(x)\sigma(y) = x\sigma(x)y\sigma(y) = N(x)N(y).$$

(c) Mit Teilaufgabe (a) erhalten wir sofort:

$$\mathrm{Tr}(x+y) = x + y + \sigma(x+y) = x + y + \sigma(x) + \sigma(y) = x + \sigma(x) + y + \sigma(y) = \mathrm{Tr}(x) + \mathrm{Tr}(y).$$

(d) Mit Teilaufgabe (a) erhalten wir sofort:

$$\mathrm{Tr}(nx) = nx + \sigma(nx) = nx + \sigma(n)\sigma(x) = nx + n\sigma(x) = n(x + \sigma(x)) = n\,\mathrm{Tr}(x).$$

Aufgabe 3

Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ und $\alpha = a + b\sqrt{m} \in K$. Wir wollen also zeigen, dass $P_\alpha(\alpha) = 0$ gilt. Einsetzen liefert nun

$$P_\alpha(\alpha) = \alpha^2 - 2a\alpha + a^2 - mb^2 = a^2 + 2ab\sqrt{m} + mb^2 - 2(a^2 + ab\sqrt{m}) + a^2 - mb^2 = 0.$$

Aufgabe 4

a) Wir wollen nun zeigen, dass $\mathcal{O}_K \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ gilt. Wir erinnern uns zunächst, dass gilt

$$\mathcal{O}_K = \{\alpha \in K : P_\alpha(x) \in \mathbb{Z}[x]\}.$$

Um eine Mengengleichheit zu zeigen, wollen wir zeigen, dass die rechte Seite in der linken Seite enthalten ist und dann umgekehrt, dass die linke Seite in der rechten Seite enthalten ist.

Konkret für unsere Aufgabe heißt das nun, dass wir zuerst zeigen wollen, dass $\mathcal{O}_K \cap \mathbb{Q} \supseteq \mathbb{Z}$ gilt. Hierzu nehmen wir ein Element $a \in \mathbb{Z}$ und wollen nun nachweisen, dass für dieses a sowohl $a \in \mathcal{O}_K$ als auch $a \in \mathbb{Q}$ gilt. Nun ist es klar das $a \in \mathbb{Q}$ gilt, da $\mathbb{Z}$ eine Teilmenge von $\mathbb{Q}$ ist. Für den Nachweis von $a \in \mathcal{O}_K$ berechnen wir $P_a(x) = x^2 - 2ax + a^2$. Da wir $a \in \mathbb{Z}$ vorausgesetzt haben, gilt nun auch $-2a \in \mathbb{Z}$ sowie $a^2 \in \mathbb{Z}$. Damit haben wir eine Inklusion gezeigt.

Also setzen wir $\alpha \in \mathcal{O}_K \cap \mathbb{Q}$ voraus und somit gilt $P_\alpha(x) \in \mathbb{Z}[x]$ und $\alpha \in \mathbb{Q}$. Da $\alpha \in \mathbb{Q}$ liegt, finden wir teilerfremde ganze Zahlen m und $n > 0$ sodass gilt: $\alpha = \frac{m}{n}$. Wegen $P_\alpha(x) \in \mathbb{Z}[x]$ wissen wir, dass gelten muss:

$$x^2 - 2 \cdot \tfrac{m}{n} \cdot x + \left(\tfrac{m}{n}\right)^2 \quad \in \quad \mathbb{Z}[x].$$

Damit das gilt, muss aber auch gelten $\frac{m^2}{n^2} \in \mathbb{Z}$. Dies bedeutet $n^2 \mid m^2$.

Angenommen, es ist $n \neq 1$. Dann gibt es ein Primteiler p von n und aus $n^2 \mid m^2$ folgt auch $p \mid m^2$. Da p prim ist, folgt $p \mid m$. Dies widerspricht jedoch der Teilerfremdheit von n und m. Also muss $n = 1$ sein, sodass $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Damit haben wir die zweite Inklusion gezeigt und damit auch die Gleichheit der Mengen.

Alternativ hätte man natürlich auch die konkrete Beschreibung von $\mathcal{O}_K$ aus der Vorlesung für die Lösung der Aufgabe verwenden können (Satz 2.6).

b) Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Um zu zeigen, dass $\sigma(\mathcal{O}_K) = \mathcal{O}_K$, müssen wir zeigen, dass ein Element α genau dann in $\mathcal{O}_K$ enthalten ist, wenn es in $\sigma(\mathcal{O}_K)$ enthalten ist. Bemerke zunächst, dass

$$\sigma(\mathcal{O}_K) = \{\sigma(\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{O}_K\}$$

gilt. Für "$\subseteq$" müssen wir nun zeigen, dass wenn $\alpha \in \mathcal{O}_K$, dann auch $\sigma(\alpha) \in \mathcal{O}_K$.
Für "$\supseteq$" müssen wir dagegen zeigen, dass es für beliebiges $\alpha \in \mathcal{O}_K$ ein $\beta \in \mathcal{O}_K$ gibt mit $\alpha = \sigma(\beta)$. Wegen

$$\alpha = \sigma(\sigma(\alpha))$$

ist $\sigma(\alpha)$ ein Kandidat für β. Das einzige, was dabei schief gehen könnte, ist, dass β in $\mathcal{O}_K$ liegen muss, wir das aber von $\sigma(\alpha)$ noch nicht gezeigt haben.

Um sowohl "$\subseteq$" als auch "$\supseteq$" zu beweisen, genügt es daher

$$\alpha \in \mathcal{O}_K \quad \Rightarrow \quad \sigma(\alpha) \in \mathcal{O}_K,$$

zu zeigen, was gleichbedeutend zu

$$P_\alpha \in \mathbb{Z}[x] \quad \Rightarrow \quad P_{\sigma(\alpha)} \in \mathbb{Z}[x]$$

ist. Es gilt nun $N(\sigma(\alpha)) = \sigma(\alpha)\sigma(\sigma(\alpha)) = N(\alpha)$ sowie $\mathrm{Tr}(\sigma(\alpha)) = \sigma(\alpha) + \sigma(\sigma(\alpha)) = \mathrm{Tr}(\alpha)$, da $\sigma(\sigma(\alpha)) = \alpha$ gilt. Somit folgern wir

$$P_\alpha(x) = x^2 - \mathrm{Tr}(\alpha)x + N(\alpha) = x^2 - \mathrm{Tr}(\sigma(\alpha))x + N(\sigma(\alpha)) = P_{\sigma(\alpha)}(x),$$

was zu zeigen war.

Aufgabe 5

Wir zeigen zuerst den Hinweis. Dazu wollen wir ein $\gamma \in K^\times$ finden mit $\sigma(\gamma) + \sigma(\alpha)\gamma \neq 0$. Setzen wir $\gamma = 1$, bekommen wir $\beta = 1 + \sigma(\alpha)$, also ist die Bedingung erfüllt solange $\sigma(\alpha) \neq -1$ gilt. Dies gilt aber nur genau dann, wenn $\alpha = -1$ gilt. Für diesen Fall müssen wir ein $\gamma \in K^\times$ finden mit $\sigma(\gamma) - \gamma \neq 0$, dafür können wir aber ein beliebiges Element $\gamma \in K^\times \setminus \mathbb{Q}$ wählen.

Haben wir nun ein solches β gefunden, können wir berechnen:

$$\alpha\beta = \alpha(\sigma(\gamma) + \sigma(\alpha)\gamma) = \alpha\sigma(\gamma) + \alpha\sigma(\alpha)\gamma = \alpha\sigma(\gamma) + \gamma = \sigma(\sigma(\alpha)\sigma(\sigma(\gamma)) + \sigma(\gamma)) = \sigma(\sigma(\alpha)\gamma + \sigma(\gamma)) = \sigma(\beta)$$

wobei wir in der dritten Gleichheit die Bedingung $1 = N(\alpha) = \alpha\sigma(\alpha)$ benutzt haben und der vierten und fünten Gleichheit Aufgabe 2 (a) sowie $\sigma(\sigma(x)) = x$ für alle $x \in K$ benutzt haben.